

UACM

**Universidad Autónoma
de la Ciudad de México**

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

Detector de fricción dinámica en articulaciones de robots industriales

TRABAJO RECEPCIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

PRESENTA

JOSÉ ALBERTO APARICIO SANTOS

Director del trabajo recepcional

Dr. Juan Carlos Martínez Rosas

México, D.F. noviembre 2014

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

DETECTOR DE FRICCIÓN DINÁMICA EN
ARTICULACIONES DE ROBOTS INDUSTRIALES

José Alberto Aparicio Santos

Noviembre 2014

Índice general

Agradecimientos	II
1. Introducción	1
2. Preliminares matemáticos	3
2.1. Modelos de fricción estáticos	3
2.1.1. Fricción Estática y Cinética	3
2.1.2. Modelo de Coulomb	5
2.1.3. Fricción Viscosa	5
2.1.4. Fricción Stribeck	7
2.2. Modelos de Fricción Dinámicos	8
2.2.1. El Modelo Dahl	8
2.2.2. El Modelo LuGre	9
2.2.3. Nuevo Modelo	12
2.3. Compensación de fricción	24
2.3.1. Compensadores de fricción no basados en modelos.	24
2.3.2. Compensadores de fricción basados en modelos.	25
2.3.3. Parametrización del nuevo modelo	26
3. Medición de velocidad y compensación de fricción usando un modelo estático	34
3.1. Obtención de la velocidad	35
3.2. Obtención de los coeficientes de fricción viscosa y fricción de Coulomb mediante el método de Kelly	38
4. Experimentos de Fricción usando el Nuevo Modelo	44
4.1. Experimento usando una señal con un periodo de 4s	45
4.2. Experimento usando una señal con un periodo 20s	48
4.3. Experimento con una posición fija	51
5. Conclusiones	54
A. Etapa de potencia	56
B. Tarjeta de adquisición de datos Q8-USB	61
B.1. características	61
B.2. Programa	63

C. Motores de transmisión armónica	65
C.1. Características del actuador	65
C.1.1. Dimensiones	65
C.1.2. Características del tacómetro	65
C.1.3. Características del encoder	69

Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de la fuerza de fricción F_f en un objeto M moviéndose relativamente sobre una superficie plana.	4
2.2. A nivel microscópico, incluso las superficies lisas son ásperas.	5
2.3. Fricción de Coulomb.	5
2.4. Fricción de Coulomb + Fricción Viscosa.	6
2.5. Modelo de fricción estática.	6
2.6. Efecto Stribeck	7
2.7. La interface de fricción entre dos superficies se piensa como el contacto entre cepillos. Por simplicidad, las cerdas inferiores se muestran como estáticas.	8
2.8. Comportamiento del modelo Dahl.	10
2.9. Comportamiento del modelo LuGre para dos entradas sinusoidales con distintas frecuencias.	11
2.10. Fuerza externa	14
2.11. Comportamiento predeslizante del nuevo modelo.	15
2.12. Trayectoria de velocidad en simulación	15
2.13. Comportamiento del estado interno de fricción z del nuevo modelo.	16
2.14. Comportamiento del estado interno de fricción y del nuevo modelo	16
2.15. Comparación de la respuesta de Histéresis correspondiente a la relación entre la fricción y la velocidad del modelo LuGre y el nuevo modelo.	16
2.16. Sistema dinámico para probar el movimiento stick-slip en simulación.	17
2.17. Fuerza de entrada de prueba durante el comportamiento stick-slip en nuevo modelo.	18
2.18. Comparación del estado interno y durante la prueba del nuevo modelo.	18
2.19. Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba stick-slip.	18
2.20. Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba stick-slip en el nuevo modelo.	19
2.21. Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba stick-slip.	19
2.22. Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba stick-slip en el modelo LuGre.	19
2.23. Diagrama de bloques para el sistema con fricción y control PID.	20
2.24. Comparación del control de posición del modelo LuGre y el nuevo modelo usando un controlador PID.	21
2.25. Diagrama de bloques de un servomotor con controlador PID y compensación de fricción.	25
3.1. Fotografía del sistema completo	34

3.2. El ruido que se produce con el bloque de derivada es demasiado para realizar algun experimento	35
3.3. Señal de velocidad usando un diferenciador robusto	35
3.4. Señal de velocidad calculada con observador de velocidad	36
3.5. Comparación de las señales de velocidad del encoder	36
3.6. Señal de velocidad generada por el tacómetro	37
3.7. Señal de tacómetro filtrada	37
3.8. Señal de velocidad generada por el tacómetro.	37
3.9. Respuesta de velocidad del motor con una pendiente de $4 Nm/s$ en la entrada	38
3.10. Respuesta de velocidad del motor con una pendiente de $20 Nm/s$ en la entrada	39
3.11. Recta aproximada a la velocidad de motor al introducirle una pendiente de $4 Nm/s$	40
3.12. Recta aproximada a la velocidad de motor al introducir un torque de $20 Nm/s$.	41
3.13. Diagrama de bloques del compensador de fricción viscosa+Coulomb.	41
3.14. Error del controlador sin compensación de fricción	42
3.15. Error del controlador con compensación de fricción viscosa+Coulomb	42
3.16. Comparación de las dos señales de error con y sin compensación de fricción viscosa + Coulomb	43
4.1. Diagrama de bloques del nuevo modelo de fricción.	44
4.2. Error sin la estimación de parámetros.	45
4.3. Error con la estimación de parámetros para una señal de periodo de $4 s$	45
4.4. Parámetro 1 para un señal de $4 s$ de periodo	46
4.5. Parámetro 2 para un señal de $4 s$ de periodo	46
4.6. Parámetro 3 para un señal de $4 s$ de periodo	46
4.7. Parámetro 4 para un señal de $4 s$ de periodo	47
4.8. Parámetro 5 para un señal de $4 s$ de periodo	47
4.9. Error con la estimación de parámetros para una señal con periodo de $20 s$.	48
4.10. Error con la estimación de parámetros para una señal con periodo de $20 s$	48
4.11. Parámetro 1 para un señal de $20 s$ de periodo	49
4.12. Parámetro 2 para un señal de $20 s$ de periodo	49
4.13. Parámetro 3 para un señal de $20 s$ de periodo	49
4.14. Parámetro 4 para un señal de $20 s$ de periodo	50
4.15. Parámetro 5 para un señal de $20 s$ de periodo	50
4.16. Acercamiento a la señal de error sin estimación de parámetros para una señal deseada constante	51
4.17. Acercamiento a la señal de error con estimación de parámetros para una señal deseada constante	51
4.18. Parámetro 1 para un señal estática	52
4.19. Parámetro 2 para un señal estática	52
4.20. Parámetro 3 para un señal estática	53
4.21. Parámetro 4 para un señal estática	53
4.22. Parámetro 5 para un señal estática	53

A.1.	Diagrama eléctrico de la etapa de potencia conectada a un motor de corriente directa.	57
A.2.	Diagrama del PCB diseñado en el software ARES, las pista azules indican pistas bajo la placa, la pisas rojas indican pisas en la cara superior de la placa	57
A.3.	Pistas de la cara inferior de la placa.	58
A.4.	Pistas de la cara superior de la placa.	59
A.5.	Entrada de las señales de voltaje.	59
A.6.	Salidas de la señal de potencia y de corriente.	60
A.7.	Vista lateral de la etapa de potencia.	60
B.1.	Fotografía de la Q8-USB.	61
B.2.	Acercamiento a las entradas analógicas.	62
B.3.	Acercamiento a las entradas y salidas digitales.	62
B.4.	Entradas de encoder, a la izquierda se observa la conexión de cada pin y las características que deben cumplir los encoders	63
B.5.	Puerto de control digital.	63
C.1.	Dimensiones únicamente del actuador.	67
C.2.	Base de acrílico.	67
C.3.	Motor con tacómetro	68
C.4.	Dimensiones del motor con el tacómetro acoplado	69
C.5.	Motor con encoder.	69
C.6.	Dimensiones del motor con el encoder acoplado	70

Índice de cuadros

2.1. Parámetros del modelo usados en la simulación	14
B.1. Bloques QUARC Target	64
C.1. Parámetros del motor RH-14D6002	66
C.2. Parámetros del tacómetro acoplado al motor RH-14D6002	68
C.3. Parámetros del encoder acoplado al motor RH-14D6002	70

*Dedicado a
mi padre Simón Aparicio,
mi madre Basilisa Santos
y a mis hermanos Simón, Sandra Luz y Leonardo Simón.*

Agradecimientos

A mi familia que ha estado siempre conmigo apoyándome de todas las maneras posibles, me faltara vida para terminar de agradecerles.

A mis compañeros, que me acompañaron a lo largo de mi formación, en especial a aquellos que considere mis amigos con los cuales compartí tristezas y alegrías.

A mis profesores, que me enseñaron varias lecciones dentro y fuera del aula.

Al extinto Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal por soporte financiero para esta investigación.

A mi querida Universidad Autónoma de la Ciudad de México que me abrió sus puertas, sin ella no habría sido posible conocer a tantas extraordinarias personas, le deseo el mejor de los futuros.

Y a los que estan leyendo este trabajo en busca de respuestas.

¡Muchas gracias a todos!

José Alberto Aparicio Santos

"Nada humano me es ajeno"

Capítulo 1

Introducción

Desde tiempos inmemoriales se ha tenido conocimiento de los efectos de la fricción. Uno de los primeros usos que se le dieron fue para generar fuego mediante frotamiento intenso de una vara y una superficie de madera o piedra. Sin embargo, a lo largo del tiempo, se ha puesto la atención necesaria para lograr su comprensión de una manera más profunda y formal. De acuerdo a la literatura actual, sabemos que la fricción es una fuerza tangencial que se resiste al movimiento relativo cuando dos superficies se frotan. En la mayor parte de los casos, la fricción es un fenómeno que hace posible actividades ordinarias como caminar o hacer que un automóvil frene. Por otro lado, también puede causar efectos indeseados en sistemas modernos que requieren alta precisión, por ejemplo, el deterioro en el desempeño de sistemas durante su movimiento a diferentes velocidades. Posibles consecuencias causadas por la fricción suelen ser errores en estado estacionario, ciclos límite, vibración y deterioro de los mecanismos mecánicos traslacionales, rotacionales, entre otros.

Su estudio ha llevado a mejorar el desempeño en una amplia variedad de sistemas que requieren compensar dichos efectos friccionales mediante técnicas modernas de control. Entre los sistemas que requieren de mayor atención en la industria moderna destacan los servomecanismos y los robots manipuladores, principalmente por ser sistemas de alta precisión, operados en un amplio margen de velocidades. En los robots industriales, el fenómeno de fricción está presente en todas sus articulaciones y mientras mayor sea el número de grados de libertad, mayor será el rol que juegue la fricción, pues en cada actuador estará presente siendo diferente su magnitud. Es importante mencionar que la fricción articular puede sufrir cambios con el tiempo debido a factores como la temperatura, el polvo, la humedad, la carga, etcétera, originando desgaste en las partes donde el contacto se hace presente. Sin embargo, hasta la fecha no existe algún transductor que permita la medición directa de tales fuerzas tangenciales. Dado que el fenómeno friccional es, desde el punto de vista de la tribología, un fenómeno microscópico variante en el tiempo y difícil de calcular en tiempo real. Es importante describir su comportamiento mediante modelos matemáticos estáticos y dinámicos.

Los modelos de fricción estáticos y dinámicos son utilizados para compensar su efecto en ambientes controlados. Por ello, sus aplicaciones pueden variar, de acuerdo a la precisión buscada.

La Tribología es literalmente el estudio del frotamiento, la cual, busca explicar con detalle la fricción a nivel molecular. Aunque el nombre fue dado por el estudio de la fricción y el frotamiento entre superficies, su historia es amplia. Por ejemplo, Leonardo Da Vinci, estudió la relación entre la fricción y la teoría de la armonía de las esferas (Armstrong 1958).

Con el propósito de superar las limitaciones de desempeño en servo-sistemas controlados, se comienzan a reemplazar las tradicionales cajas de engranes con modernas y eficientes transmisiones armónicas que a diferencia de la transmisión directa, pueden ser utilizadas en aplicaciones de alta precisión, elevadas cargas y diferentes velocidades, como radares militares, robots industriales, máquinas-herramientas, cámaras de satélite, exploración marina, microcirugía, entre otros. La transmisión armónica tiene ventajas y desventajas superiores e inferiores respecto a las cajas de engranes convencionales. Sus ventajas incluyen la capacidad de generar alto torque, geometría concéntrica, diseño compacto y ligero, además de nulo huelgo (conocido en inglés como *back-slash*). Sin embargo, las transmisiones armónicas sufren, debido a la alta flexibilidad, resonancia de vibración, elevados niveles de fricción interna y amortiguamiento no lineal. La falta de literatura, comparada con la existente para las transmisiones de engranes convencionales también ha limitado su uso. El problema de compensación de fricción basado en modelo para estos servo-sistemas es complicado por el hecho de que los parámetros son inciertos. Además para el caso de modelos de fricción la literatura es muy limitada. Esta tesis hace un estudio experimental utilizando un sistema de prueba para encontrar los parámetros más sobresalientes de un modelo de fricción estático y dinámico.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en el Capítulo 2 se hace una descripción de los preliminares matemáticos de algunos modelos de fricción y técnicas de control existentes, así como simulaciones en el programa SIMULINK de MATLAB. El Capítulo 3 muestra la medición de velocidad y compensación de fricción mediante el modelo de fricción viscosa+Coulomb. El Capítulo 4 presenta los experimentos realizados utilizando un nuevo modelo de fricción descrito ampliamente en el capítulo 2, en el Capítulo 5 se muestran las conclusiones. Por último se presentan tres Apéndices: Apéndice A, donde se analiza la etapa de potencia; Apéndice B, donde se describen las características de la tarjeta de adquisición de datos, y Apéndice C, que muestra las características de los motores utilizados en los experimentos.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

Los modelos de fricción son una interpretación que busca describir lo más fielmente posible el comportamiento del fenómeno físico que ocurre cuando dos o más superficies entran en contacto. Los modelos se pueden dividir en dos categorías, modelos estáticos y modelos dinámicos. Sin embargo no es sencillo describirlos, puesto que conforme la ciencia ha avanzado se han descubierto más efectos y comportamiento de los materiales a niveles moleculares. En resumen, mientras más de estos efectos sean descritos, mejor será el modelo buscado. En éste capítulo analizaremos los modelos de fricción estáticos para después abordar los modelos de fricción dinámicos.

2.1. Modelos de fricción estáticos

Los modelos más básicos describen una relación estática entre la fuerza de fricción y la velocidad, y consisten de diferentes componentes, los cuales se encargan de ciertos aspectos de la fuerza de fricción. La idea principal es que la fricción sea independiente de la velocidad y el área de contacto.

2.1.1. Fricción Estática y Cinética

La fricción estática conocida como fricción *stiction* describe la fricción en el reposo, partiendo de la idea de que la fricción en el reposo es mayor a la fricción cinética. Entonces, la fricción estática es considerada como la fuerza necesaria para iniciar el movimiento a partir del reposo. A la transición del reposo (fricción estática) al movimiento (fricción cinética) se le conoce como *break-away force* ó traducido como fuerza que rompe la posición estática.

Consideramos un objeto de masa M que se desliza por una superficie. Si tratamos de deslizarlo no lo lograremos si no aplicamos cierta fuerza mínima. Luego, el objeto comienza a moverse y casi siempre con menos fuerza que la que necesitamos inicialmente. Si disminuimos la masa, necesitaremos menos fuerza que antes para poner o mantener en movimiento el objeto. De este comportamiento podemos afirmar:

Primero, cuando un objeto descansa o se desliza sobre una superficie, siempre podemos representar la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre el objeto en términos de componentes de fuerza perpendiculares y paralelos a la superficie. Llamaremos a la componente perpendicular fuerza normal, denotada como F_n . El vector componente paralelo a la superficie es la fuerza de fricción, denotada con F_f . Por definición, F_n y F_f son perpendiculares. Si la superficie no tiene fricción, la fuerza de contacto sólo tendrá componente normal y F_f será cero, pero esto es una idealización inasequible. La dirección de la fricción siempre es opuesta al movimiento relativo de las dos superficies.

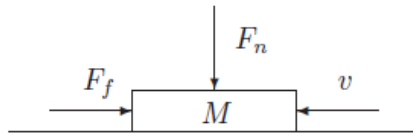


Figura 2.1: Representación esquemática de la fuerza de fricción F_f en un objeto M moviéndose relativamente sobre una superficie plana.

El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la fuerza de fricción cinética F_k . La magnitud de esta fuerza suele incrementarse al aumentar la fuerza normal. Es por ello que necesitamos más fuerza para deslizar un cuerpo con mayor masa. En muchos casos la magnitud de la fuerza de fricción cinética F_k experimental es aproximadamente proporcional a la magnitud F_n de la fuerza normal. En tales casos, representamos la relación con la ecuación (2.1).

$$F_k = \mu_k F_n \quad (2.1)$$

donde μ_k es una constante llamada coeficiente de fricción cinética. Es un coeficiente de dos magnitudes de fuerza, μ_k es un número sin unidades.

Las fuerzas de fricción y la normal siempre son perpendiculares. La ecuación (2.1) no es vectorial, sino una relación escalar entre las magnitudes de las dos fuerzas perpendiculares.

La Ecuación (2.1) sólo es una representación aproximada de un fenómeno complejo (Young y Freedman 2013). En el nivel microscópico, las fuerzas de fricción y la normal se deben a las fuerzas intermoleculares (fundamentalmente eléctricas) entre dos superficies ásperas en los puntos de contacto (figura 2.2). El área de contacto real suele ser más pequeña que el área de total. Al deslizarse una caja sobre el piso, se forman y rompen enlaces entre las dos superficies, y el número total de enlaces varía; por ello, la fuerza de fricción cinética no es perfectamente constante.



Figura 2.2: A nivel microscópico, incluso las superficies lisas son ásperas.

2.1.2. Modelo de Coulomb

El modelo de fricción más básico es el modelo de fricción de Coulomb, también conocido como fricción seca, el cual es una componente de fricción independiente de la velocidad donde la fuerza de fricción es descrita como:

$$\mathbf{F}_c = \mu \mathbf{F}_n \operatorname{sgn}(\mathbf{v}), \quad (2.2)$$

donde \mathbf{F}_C es la fricción de Coulomb, \mathbf{F}_n es la normal respecto a la superficie de contacto, μ es el coeficiente de Coulomb y sgn es la función signo.

El modelo de Coulomb no especifica la fuerza de fricción para la velocidad cero. Puede ser cero o cualquier valor entre $-F_c$ y F_c como se muestra en la figura 2.3. Debido a su simplicidad, este modelo de fricción ha sido aplicado en una variedad de reguladores y controladores para la compensación de fricción articular y traslacional.

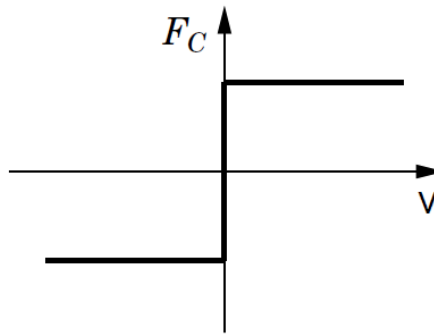


Figura 2.3: Fricción de Coulomb.

2.1.3. Fricción Viscosa

En el siglo XIX la teoría de la hidrodinámica fue desarrollada mediante expresiones donde la fuerza de fricción era originada por la viscosidad de los lubricantes. Es así que el término de fricción viscosa es ampliamente utilizado para definir esta componente de fuerza, la cual es lineal con respecto a la velocidad y puede ser expresada como:

$$\mathbf{F}_v(\mathbf{v}) = \sigma_v \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

con σ_v como coeficiente de fricción viscosa. La fricción viscosa por lo regular se combina con la fricción de Coulomb, resultando una composición de componentes como se muestra en la Figura 2.4.

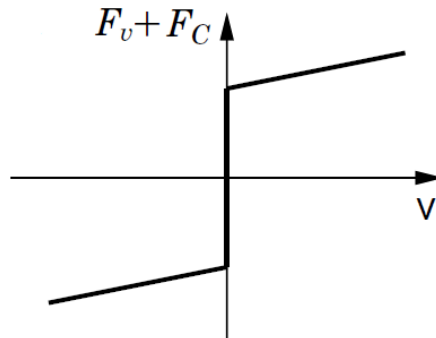


Figura 2.4: Fricción de Coulomb + Fricción Viscosa.

Hay un fenómeno llamado fricción viscosa negativa, el cual hace que la fricción decrezca con el incremento de la velocidad. La fricción Stribeck es un ejemplo de fricción viscosa negativa el cual se describirá en la sección 2.1.4.

Los modelos pueden ser combinados de diferentes maneras. Por ejemplo en la Figura 2.5 se combinan la fuerzas de fricción estática, fricción de Coulomb y fricción viscosa, por lo cual cualquier combinación de dichos modelos es conocida como modelo clásico de fricción.

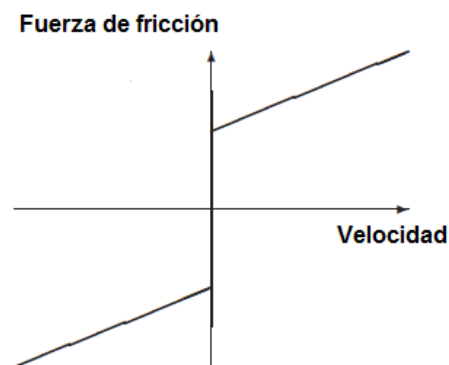


Figura 2.5: Modelo de fricción estática.

2.1.4. Fricción Stribeck

La fricción Stribeck, también conocida efecto Stribeck es un fenómeno de fricción que tiene origen en el uso de fluidos lubricantes y da lugar a decrementos de la fricción con el incremento de la velocidad a velocidades bajas, Stribeck observó que la fuerza de fricción no decrece de manera discontinua como se ve en la figura 2.5, sino que existe una dependencia de la velocidad continua como se muestra en la Figura 2.6.

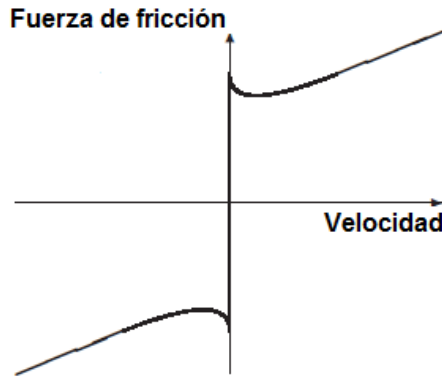


Figura 2.6: Efecto Stribeck

El efecto Stribeck puede ser expresado como una función que depende de la velocidad y expresarlo en forma general como $\mathbf{F}_s(\mathbf{v})$. La fuerza de fricción total incluyendo los efectos Stribeck, fricción de Coulomb y fricción viscosa se describe por la siguiente ecuación 2.4.

$$\mathbf{F}_f(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{F}_n \operatorname{sgn}(\mathbf{v}) + \sigma_v \mathbf{v} + \mathbf{F}_s(\mathbf{v}), \quad (2.4)$$

En (Armstrong 1958) describe un modelo sin memoria que incorpora el efecto Stribeck, el cual esta dado como

$$\mathbf{F}_f(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{F}_n \operatorname{sgn}(\mathbf{v}) + \sigma_v \mathbf{v} + [f_s - f_k] \operatorname{sgn}(\mathbf{v}) e^{(-\mathbf{v}/\mathbf{v}_s)^2} \quad (2.5)$$

donde $f_s > 0$ es el nivel de fricción estática, f_k es el nivel mínimo de fricción cinética y $v_s > 0$ es llamada velocidad Stribeck.

La discontinuidad en la velocidad cero puede traer varias dificultades numéricas, pero para algunas aplicaciones básicas, los modelos estáticos son adecuados para describir los efectos de la fricción. Pero para aplicaciones prácticas en sistemas posicionadores de alta precisión se deben considerar otras propiedades para un modelo satisfactorio.

2.2. Modelos de Fricción Dinámicos

Recientemente existe un intenso interés en el estudio de los llamados modelos de fricción dinámicos, puesto que este tipo de modelos tienen la posibilidad de capturar con mayor detalle los efectos de la fricción durante el movimiento y durante cualquier condición de operación. Esto ha sido motivado por la curiosidad intelectual y por las exigencias de obtener una mayor precisión de servomecanismos mediante la compensación de dicho fenómeno. En la actualidad los avances en hardware han permitido implementar compensadores de fricción en tiempo real; sin embargo, su estudio continúa. Los modelos de fricción dinámicos se diferencian de los modelos estáticos al no considerar variaciones de movimiento, ni interacciones internas del sistema, dado que la velocidad se puede considerar como una variable medible o disponible, bajo estas consideraciones, la fricción puede ser descrita mediante los modelos que a continuación se mencionan.

2.2.1. El Modelo Dahl

El modelo Dahl o efecto Dahl es un fenómeno de fricción que se origina de la deformación en los sitios de unión entre dos superficies, las cuales están bloqueadas por la fricción estática. El efecto Dahl causa corrimiento en la unión que se comporta como un resorte lineal para pequeños desplazamientos traslacionales o rotacionales, las masas o las inercias regresan a su posición original. En (Dahl 1968) comparó este comportamiento con la de un material con cerdas elásticas, mostrando que matemáticamente dicho fenómeno puede ser interpretado como una deformación plástica de las cerdas (Canudas de Wit *et al.* 1995), el cual puede ser descrito como se muestra en la Figura 2.7.

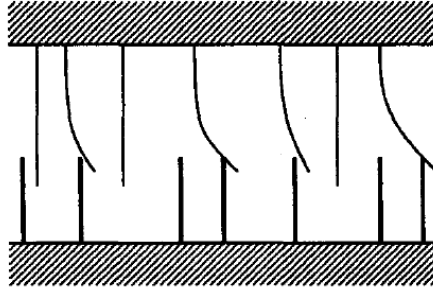


Figura 2.7: La interface de fricción entre dos superficies se piensa como el contacto entre cepillos. Por simplicidad, las cerdas inferiores se muestran como estáticas.

Dahl asume que la fricción no sólo depende de la velocidad sino también del desplazamiento. La siguiente expresión fue hallada empíricamente (Dahl 1977) y describe el comportamiento de las cerdas:

$$\frac{d\mathbf{F}_f(\dot{\mathbf{x}})}{d\mathbf{x}} = \sigma \left(1 - \frac{\mathbf{F}_f}{\mathbf{F}_c} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{x}}) \right)^n \cdot S \quad (2.6)$$

donde:

\dot{x} es la velocidad.

σ es el parámetro de rigidez en el punto de equilibrio $\mathbf{F}_f = 0[N]$.

\mathbf{F}_c es el nivel de la fricción de Coulomb.

n es un parámetro dependiente del material en el caso de materiales quebradizos se tiene $0 \leq n \leq 1$ y para materiales dúctiles $n \geq 1$.

S es el factor de estabilización, el cual esta dado por $\text{sgn}\left(1 - \frac{\mathbf{F}_f}{\mathbf{F}_c} \text{sgn}(\dot{\mathbf{x}})\right)$ para simulaciones.

Para el caso más simple $n = 1$, el factor de estabilización S de la última parte de la ecuación 2.6 puede ser puesto como 1 para proteger contra la inestabilidad que puede ocurrir a causa de factores tales como el redondeo computacional. Las funciones para $\frac{\mathbf{F}_f}{\mathbf{F}_c}$ están definidas entre ± 1 .

$$\frac{d\mathbf{F}_f(\dot{\mathbf{x}})}{d\mathbf{x}} = \sigma \left(1 - \frac{\mathbf{F}_f}{\mathbf{F}_c} \text{sgn}(\dot{\mathbf{x}})\right), \quad (2.7)$$

lo cual se puede describir como una derivada con respecto del tiempo lo que da como resultado

$$\frac{d\mathbf{F}_f}{dt} = \frac{d\mathbf{F}_f}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sigma \dot{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{F}_f}{\mathbf{F}_c} \sigma |\dot{\mathbf{x}}| \quad (2.8)$$

Con la expresión 2.8 es posible modelar el predeslizamiento y la histéresis como se muestra en la Figura 2.8, sin embargo, con este modelo dinámico no es posible capturar otros fenómenos como el efecto *Stribeck* y la habilidad de predecir el movimiento *stick-slip*, ó brincos, sin embargo esto representa sólo una aproximación del comportamiento de predeslizamiento.

2.2.2. El Modelo LuGre

El modelo Dahl forma la base del modelo LuGre, el cual se muestra introduciendo el término $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{F}_f}{\sigma_0}$ como variable de estado de la ecuación 2.8 y $\sigma_0 = \sigma$ por consiguiente se puede reescribir como:

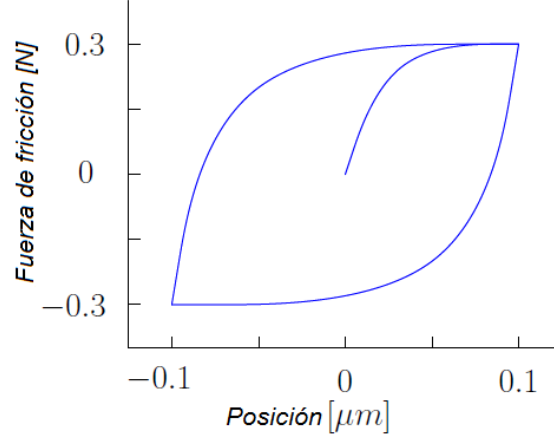


Figura 2.8: Comportamiento del modelo Dahl.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\mathbf{F}_f}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\mathbf{F}_f}{d\mathbf{x}} \mathbf{v} = \mathbf{v} - \sigma_0 \frac{|\mathbf{v}|}{\mathbf{F}_c} \mathbf{z}. \quad (2.9)$$

El modelo LuGre reemplaza la constante \mathbf{F}_c por una función dependiente de la velocidad $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ y agrega dos términos más. σ_1 que es un parámetro asociado con microdesplazamientos y $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ que es un término sin memoria dependiente de la velocidad dando como resultado:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{v} - \sigma_0 \frac{|\mathbf{v}|}{\mathbf{g}(\mathbf{v})} \mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{v})\mathbf{z} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{F}_f = \sigma_0 \mathbf{z} + \sigma_1 \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (2.11)$$

donde:

\mathbf{F}_f es la fuerza de fricción.

\mathbf{v} es la velocidad relativa entre dos superficies en contacto.

\mathbf{z} es el estado de fricción interno.

Dado que \mathbf{z} puede ser interpretado como la deflexión promedio de las cerdas, el modelo LuGre representa un comportamiento tipo resorte para pequeños desplazamientos como

el modelo Dahl con σ_0 como la rigidez, σ_1 el microamortiguamiento y $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ el macroamortiguamiento que normalmente resiste a la fricción viscosa ($\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \sigma_2\mathbf{v}$). En aplicaciones donde se requieren movimientos lentos a nanoescala σ_1 es un parámetro muy importante para predicciones acertadas. Para otros sistemas con predicciones milimétricas σ_1 tendrá un rol menos importante. Para sistemas con asimetrías en la fricción pueden ser elegidos diferentes parámetros para valores de velocidad positiva y negativa. Otra ventaja del modelo LuGre es que los regímenes de deslizamiento y predeslizamiento son descritos en el mismo modelo.

Una de las propiedades del modelo de LuGre es la de describir el comportamiento *zero-slip* el cual es conocida en la literatura como *position drift* o *plastic sliding*. Esto se obtiene tras aplicar una fuerza menor a la fuerza de fricción estática, donde se observa que el sistema no regresa a su posición original. Después de aplicar la fuerza el sistema reacciona inicialmente como un resorte y la masa se mueve una pequeña distancia hasta llegar al estado estacionario, similarmente el estado z aumenta hasta que el estado estacionario es alcanzado. Después de remover la fuerza el estado z regresa a cero pero la masa no regresa por completo. A pesar de que este modelo tiene precisión, aun le falta describir otro fenómeno de fricción llamado histéresis con memoria no local.

El modelo LuGre es dependiente del rango como se muestra en la Figura 2.9, porque no captura el punto de memoria en sentido inverso. La dependencia de rango en el modelo LuGre es causado por el termino $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ de la ecuación 2.10 el cual captura el efecto Stribeck.

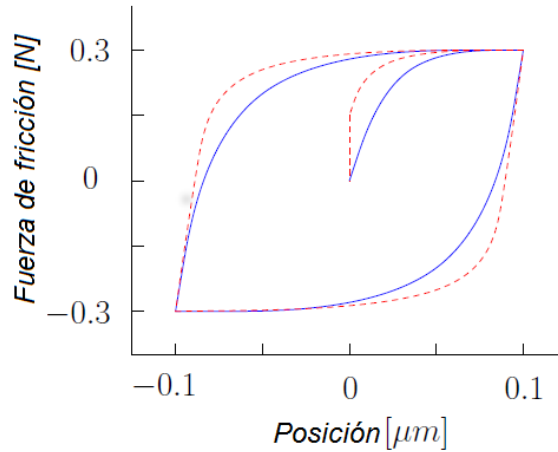


Figura 2.9: Comportamiento del modelo LuGre para dos entradas sinusoidales con distintas frecuencias.

En resumen el modelo LuGre describe los efectos de la fricción viscosa y de Coulomb pero también comportamientos de la fricción más complejos como el movimiento Stick-slip, desplazamiento de predeslizamiento, efecto Dahl y retraso friccional. La principal ventaja de éste y otros modelos similares de fricción dinámica es su habilidad para reproducir el efecto Stribeck, el cual explica la transición del régimen de fricción estático al dinámico. Sin

embargo, el modelo LuGre únicamente puede ser aplicado asumiendo conocimiento total o parcial de sus parámetros. Por consiguiente, resulta un esquema poco práctico cuando las condiciones de contacto y operación varían con el tiempo, tales como temperatura, humedad, polvo, desgaste, carga, entre otras.

2.2.3. Nuevo Modelo

Para el objetivo principal de esta tesis se presenta un nuevo modelo dinámico descrito en (Martínez *et al.* 2015) para describir la fricción. El cual es una extensión del Modelo LuGre presentado en (Canudas de Wit *et al.* 1995). La principal ventaja con respecto a otros modelos de fricción reside en la posibilidad de identificar en tiempo real todos los parámetros relevantes asociados al fenómeno de fricción. Esto es particularmente importante puesto que los parámetros cambian con el tiempo haciendo difícil calibrar de manera continua el modelo.

El nuevo modelo tiene la siguiente estructura para la fuerza de fricción (\mathbf{F}) entre dos superficies en contacto.

$$\mathbf{F} = \sigma_0 F_c \mathbf{z} + \sigma_1 \dot{\mathbf{z}} + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}} + \sigma_0 (F_s - F_c) \mathbf{y} + \alpha \dot{\mathbf{y}}, \quad (2.12)$$

donde $F_c > 0$ es el parámetro correspondiente a la fricción de Coulomb, $F_s < 0$ es el parámetro correspondiente a la fricción de estática y $\sigma_i > 0$; $i = 0, 1, 2$ son constantes que pueden ser interpretadas como parámetros de amortiguamiento y rigidez. En este modelo \mathbf{z} está relacionado a la fricción de Colomb y \mathbf{y} al efecto Stribeck. La dinámica de \mathbf{z} y \mathbf{y} están dadas por.

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{q}} - \sigma_0 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z}, \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{y} + \frac{1}{\sigma_0} \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n |\dot{\mathbf{q}}|^m}, \quad (2.14)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es la velocidad rotacional relativa de las superficies en contacto, m es una cantidad conocida que tiene valor de $m = 1/2$ o $m = 2$, $\alpha > 0$ es una constante, $n = [1/\dot{q}_s]^m$, con \dot{q}_s como la velocidad de Stribeck.

Para fines analíticos y de simulación, las ecuaciones (2.12)- (2.14) incluyen ligeras modificaciones. La ganancia σ_0 es incorporada en el primero y cuarto término de (2.12), y en el segundo término de (2.13) y (2.14) respectivamente. La ecuación (2.14) y los términos cuarto y quinto en (2.12) ahora representan el proceso transitorio en el deslizamiento de las cerdas que van desde un estado de deflexión máxima sin deslizamiento a un proceso de deslizamiento completo. Este proceso transitorio es debido al efecto Stribeck. Es claro que

la contribución de los términos $\sigma_1 \dot{\mathbf{z}}$ y $\alpha \dot{\mathbf{y}}$ es importante sólo para movimientos relativos que tienen cambio de dirección.

Finalmente, la sustitución de (2.13) y (2.14) en (2.12) lleva a

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \sigma_0 F_c \mathbf{z} + \sigma_1 \dot{\mathbf{q}} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z} + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}} \\ & + \sigma_0 (F_s - F_c) \mathbf{y} + \alpha \left[-\mathbf{y} + \frac{1}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comportamiento en estado estacionario

Para calcular la respuesta en estado estacionario, es necesario fijar $\dot{\mathbf{q}}$ y tomar $\dot{\mathbf{z}} = 0$ y $\dot{\mathbf{y}} = 0$, entonces el equilibrio para (2.13) es

$$\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (2.16)$$

Y el equilibrio respectivo para (2.14) es

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m. \quad (2.17)$$

La sustitución de (2.16) y (2.17) en (2.15) resulta en

$$\bar{\mathbf{F}} = F_c \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}} + (F_s - F_c) \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m, \quad (2.18)$$

que coincide con la solución en estado estacionario presentada para el modelo LuGre.

Comportamiento dinámico del modelo

En ésta sección, se estudia el comportamiento dinámico del modelo de fricción dado por (2.12)-(2.18). Con la finalidad de comprobar si en realidad la nueva representación corresponde a un buen modelo de fricción, se llevaron a cabo un conjunto de simulaciones para demostrar que el nuevo modelo tiene la capacidad de capturar los diferentes fenómenos presentes en la fricción. Para este propósito se usa el sistema traslacional estudiado en (Canudas de Wit *et al.* 1995). Los valores para los parámetros involucrados en el esquema

(2.12) se muestran en el cuadro 2.1.

Parámetro	Valor	Unidades
σ_0	10^5	$[\frac{1}{m}]$
σ_1	$\sqrt{10^5}$	$[\frac{m}{seg}]$
σ_2	0,4	$[\frac{N}{m/seg}]$
F_c	1	$[N]$
F_s	1,5	$[N]$
v_s	0,001	$[\frac{m}{seg}]$
α	10^9	$[\frac{N}{m/seg}]$

Cuadro 2.1: Parámetros del modelo usados en la simulación

Desplazamiento pre-deslizante

La primera simulación en este trabajo fue desarrollada para averiguar si el nuevo modelo de fricción captura el comportamiento de desplazamiento pre-deslizante. Tal efecto afirma que la fuerza de fricción se comporta como la de un resorte siempre y cuando la fuerza aplicada sea menor a la fuerza necesaria para iniciar un movimiento. Esta prueba fue llevada a cabo aplicando una fuerza externa u con forma de rampa ascendente y descendente de magnitud máxima equivalente al 95 % de la fuerza necesaria para vencer el reposo de una masa con peso unitario. La fuerza de entrada y el desplazamiento pre-deslizante obtenido en las figuras 2.10 y 2.11. Como puede ser observado, el comportamiento pre-deslizante alcanzado con el modelo (2.12)-(2.14), concuerdan cualitativamente con los resultados conseguidos en (Canudas de Wit *et al.* 1995). En la figura 2.11 se aprecia una ligera desviación en los resultados obtenidos con el modelo (2.12)-(2.14), en comparación con el Modelo LuGre. La razón de tal efecto se debe a la rigidez derivado de los estados internos y y z del nuevo modelo de fricción.

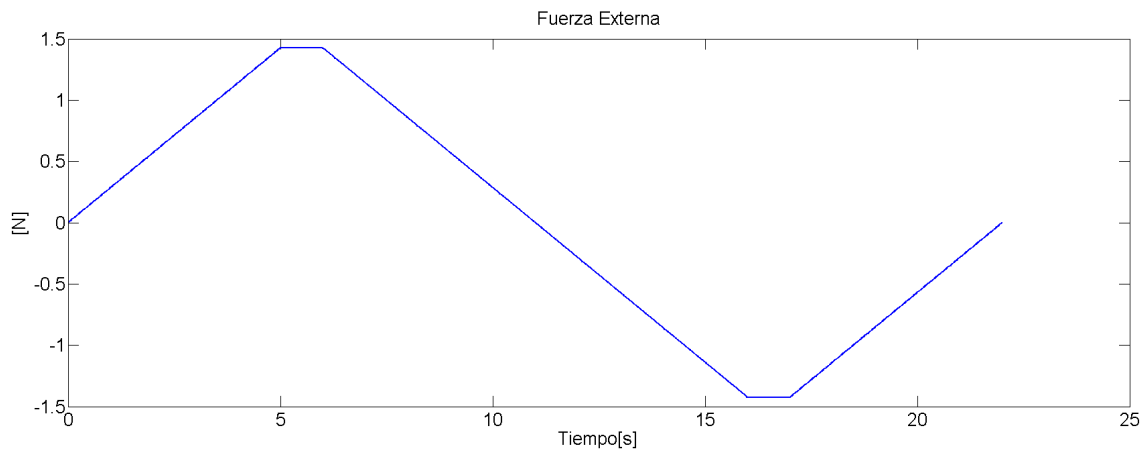


Figura 2.10: Fuerza externa

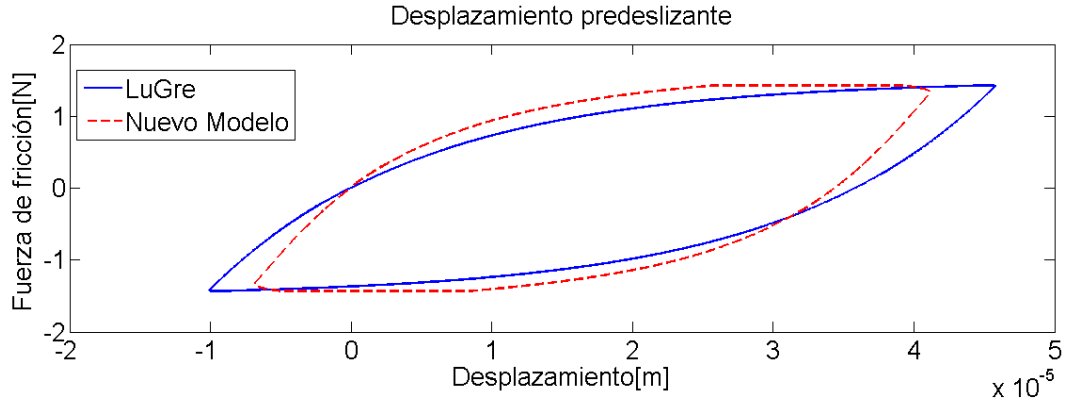


Figura 2.11: Comportamiento predeslizante del nuevo modelo.

Comportamiento de Histéresis

La segunda prueba realizada tiene el propósito de mostrar que en el nuevo modelo de fricción dinámica existe histéresis en la relación correspondiente entre la fricción y la velocidad. Para este propósito se aplicó una señal de velocidad con perfil senoidal al modelo de fricción. La gráfica de la velocidad de entrada se muestra en la figura 2.12. Las figuras 2.13 y 2.14 muestran el comportamiento de los estados internos de fricción resultantes z y y para el nuevo modelo. Finalmente, la figura 2.15 muestra la comparación del comportamiento de histéresis del modelo (2.12)-(2.14) y del Modelo LuGre. De acuerdo a la figura 2.15 es claro que el nuevo modelo dinámico de fricción captura la histéresis existente en el fenómeno de fricción. En la figura 2.15, es importante notar que la fuerza de fricción es más baja para velocidades decrecientes en comparación a incrementos de velocidad. En la figura 2.13, la respuesta dinámica del estado interno de fricción z , presenta la deflexión promedio de las cerdas de acuerdo a los cambios de velocidad alrededor del equilibrio. Por otro lado, la figura 2.14 se aprecia el estado interno y que relaciona al efecto Stribeck y describe los transitorios correspondientes a la transición del régimen estático al régimen dinámico durante cada cambio de dirección de la velocidad de entrada.

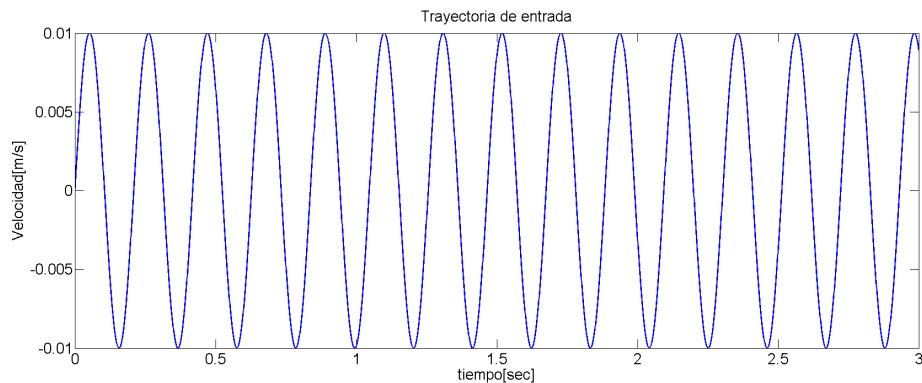


Figura 2.12: Trayectoria de velocidad en simulación

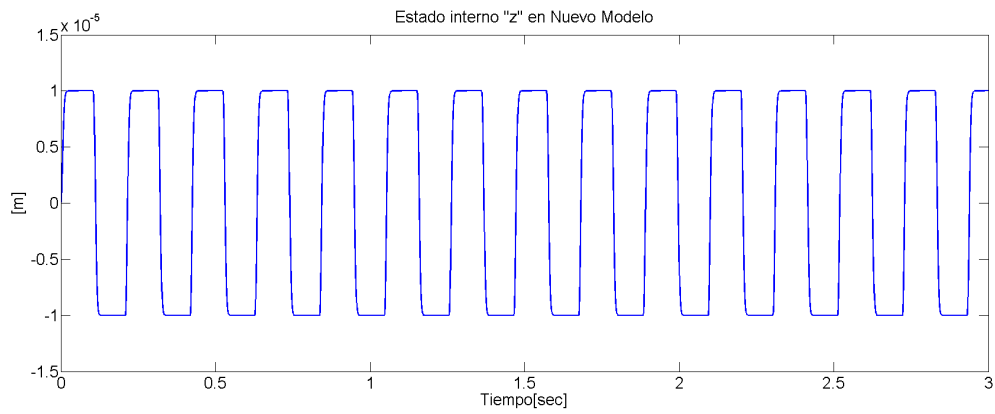


Figura 2.13: Comportamiento del estado interno de fricción z del nuevo modelo.

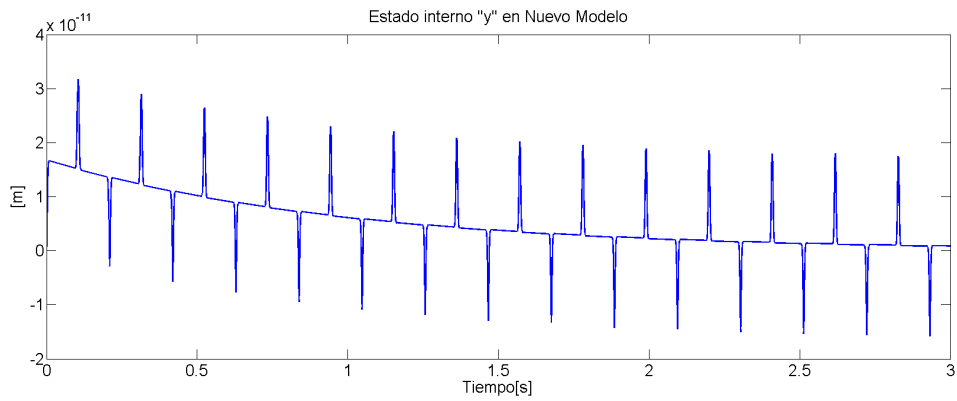


Figura 2.14: Comportamiento del estado interno de fricción y del nuevo modelo

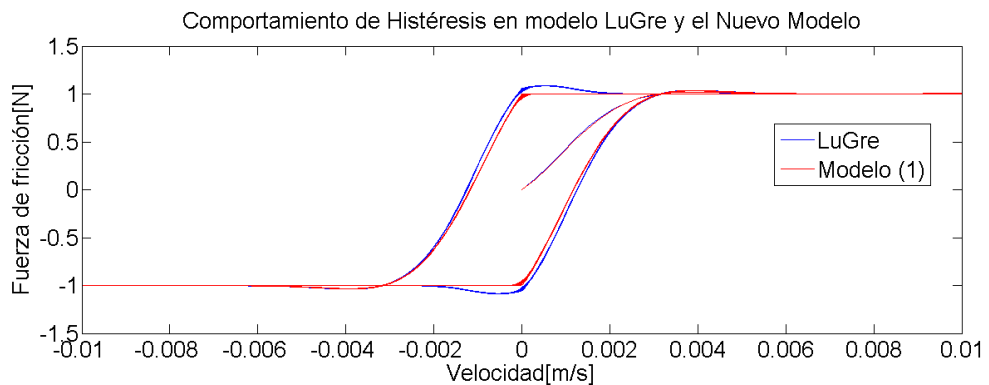


Figura 2.15: Comparación de la respuesta de Histéresis correspondiente a la relación entre la fricción y la velocidad del modelo LuGre y el nuevo modelo.

Movimiento frenado-deslizamiento (stick-slip)

Para mostrar que la fuerza de fricción es mayor en reposo que durante el movimiento tipo frenado-deslizamiento (stick-slip) se desarrolla usando el nuevo modelo de fricción. Para llevar a cabo la simulación, se considera el experimento presentado en (Canudas de Wit *et al.* 1995), donde emplea el valor de los parámetros de el cuadro 2.1. Para este experimento se toma una masa con peso unitario enganchada a un resorte cuyo extremo es jalado con una velocidad constante. Este sistema es mostrado en la figura 2.16. La figura 2.17 muestra que la fuerza del resorte se incrementa de manera lineal. Así la fuerza de fricción contrarresta la fuerza del resorte y provoca un ligero desplazamiento. Cuando la fuerza aplicada alcanza la magnitud necesaria para superar la fricción estática (*break-away force*), la masa comienza a deslizarse y la fricción decrece rápidamente debido al efecto Stribeck, el cual es expresado por el comportamiento del estado interno y mostrado en la figura 2.18. Cuando la fuerza del resorte decrece, la masa disminuye su movimiento y la fuerza de fricción se incrementa debido nuevamente al efecto Stribeck, en consecuencia, el movimiento se detiene. Este fenómeno repetitivo es visualizado en la figura 2.19, donde se presenta la posición de la masa y el resorte. El comportamiento de la fuerza de fricción y la velocidad de la masa pueden ser visualizados en la figura 2.20. Por lo tanto, es evidente que los resultados obtenidos con el modelo propuesto capturan el comportamiento *stick-slip*. La respuesta dinámica de las figuras 2.19 y 2.20 pueden compararse con el movimiento frenado-deslizado presentado por LuGre (Canudas de Wit *et al.* 1995), el cual se observa en las figuras 2.21 y 2.22. Claramente se observa que la fuerza de fricción de la figura 2.20, muestra un transitorio de mayor amplitud, permitiendo una transición de régimen estático a dinámico más veloz, cuyo efecto es debido al estado y correspondiente al efecto Stribeck.

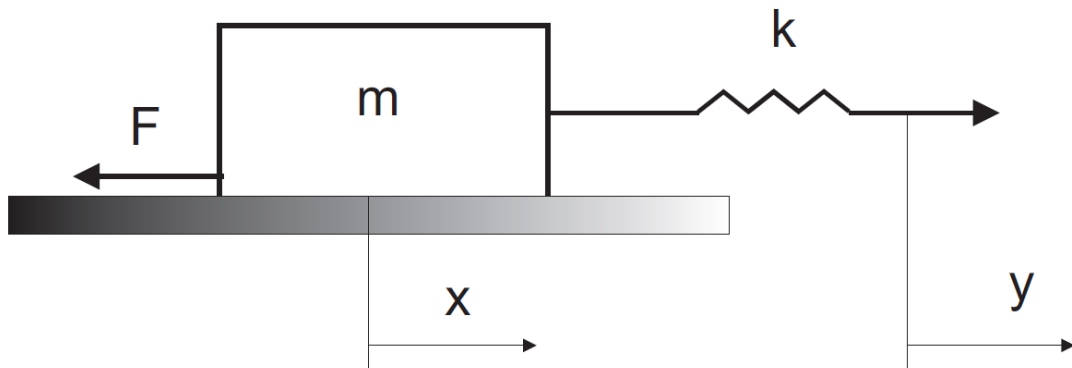


Figura 2.16: Sistema dinámico para probar el movimiento stick-slip en simulación.

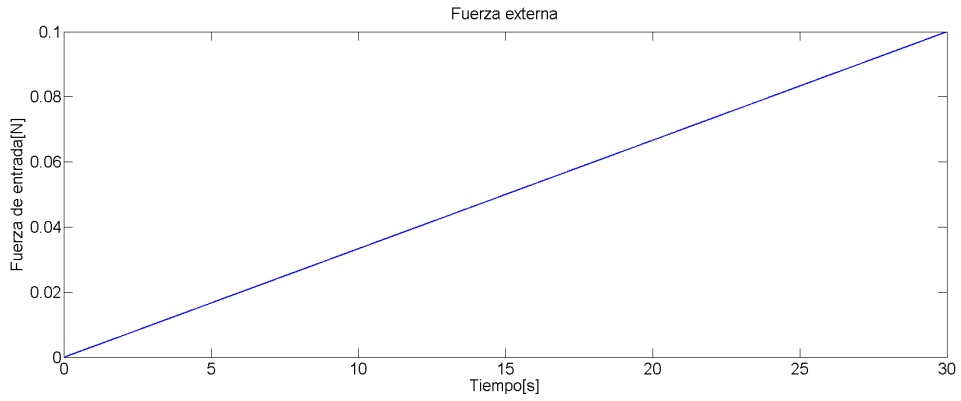


Figura 2.17: Fuerza de entrada de prueba durante el comportamiento stick-slip en nuevo modelo.

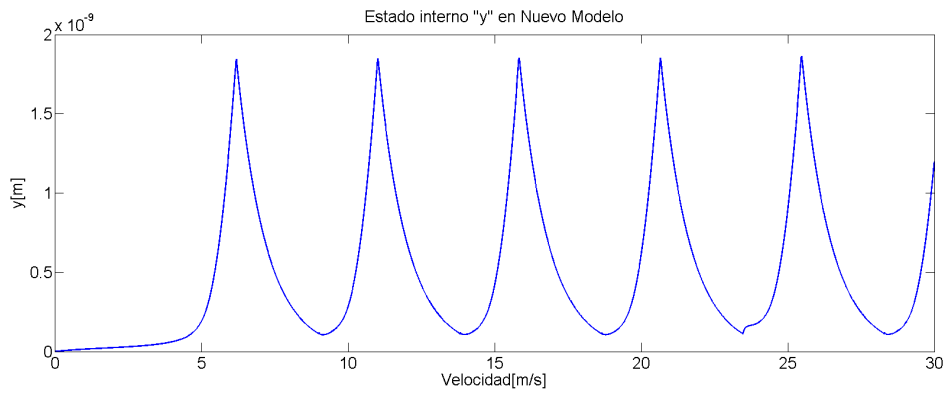


Figura 2.18: Comparación del estado interno y durante la prueba del nuevo modelo.

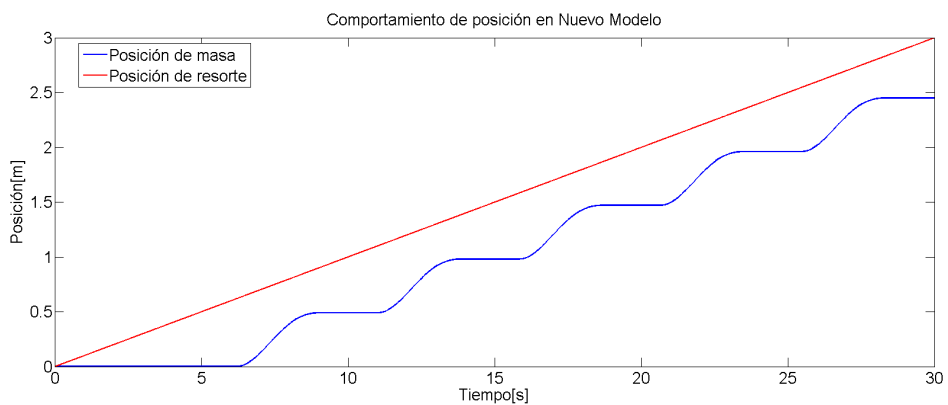


Figura 2.19: Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba stick-slip.

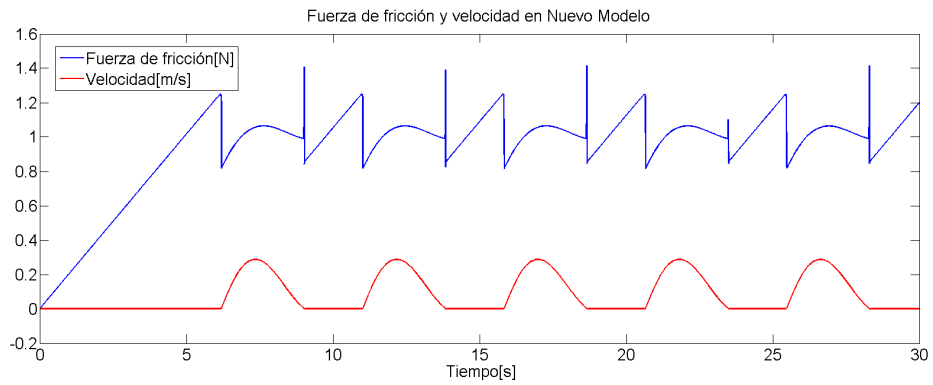


Figura 2.20: Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba stick-slip en el nuevo modelo.

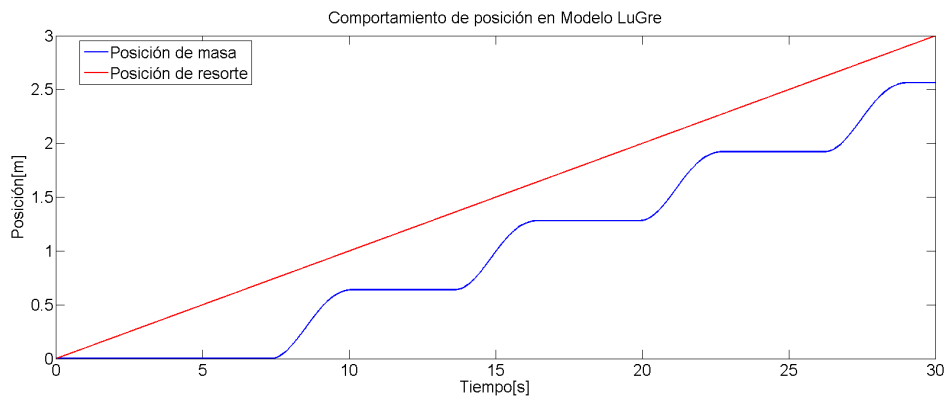


Figura 2.21: Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba stick-slip.

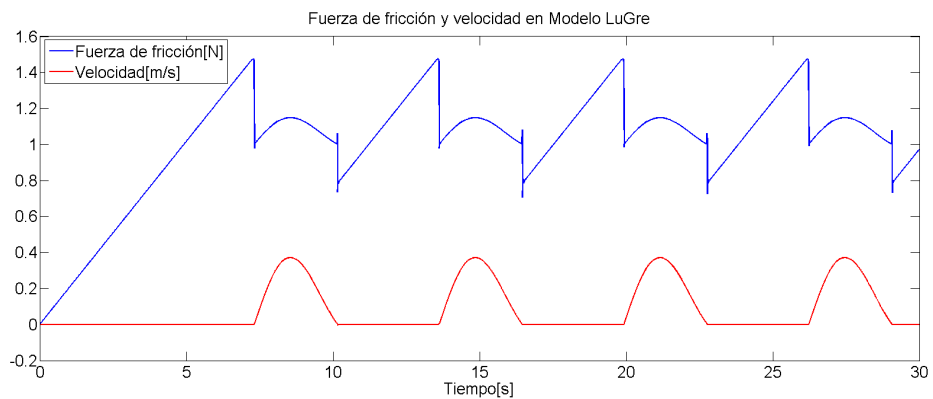


Figura 2.22: Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba stick-slip en el modelo LuGre.

Ciclos limites y control PID

Un ciclo limite es una trayectoria cerrada en el plano de fase, estos pueden ser estables, quiere decir que las trayectorias cercanas tienden hacia ella, o inestables, es decir, las trayectorias cercanas no convergen al ciclo limite, pero esto no implica que el sistema sea exponencialmente inestable (Armstrong *et al.* 1994). Se ha observado experimentalmente que la fricción puede llevar a ciclos limites en servo mecanismos donde el controlador integral.

Con el fin de aplicar el nuevo modelo de fricción en un problema de sistema típico, y con el objetivo de probar su desempeño con un controlador PID y poder mostrar su habilidad para compensar los ciclos límites causados por la fricción, se realizó una simulación usando el mismo sistema de movimiento lineal y ganancias del controlador PID aplicado en (Canudas de Wit *et al.* 1995). Un diagrama de bloques del sistema de movimiento lineal es mostrado en la figura 2.23. En esta simulación se ha puesto una posición de referencia para una masa donde el nuevo modelo de fricción es usado para describir una fuerza de deslizamiento resistivo. La comparación entre los resultados de (Canudas de Wit *et al.* 1995) y los obtenidos con el nuevo modelo de fricción se muestra en la figura 2.24. Se puede observar, que el nuevo modelo de fricción reproduce ciclos límites de menor amplitud que la resultante en (Canudas de Wit *et al.* 1995), además muestra que la combinación del controlador PID y el nuevo modelo de fricción ayudan a reducir alrededor de un 65% el error cuando se compara con los resultados obtenidos en (Canudas de Wit *et al.* 1995). Lo anterior verifica que el modelo de fricción propuesto tiene mejores características dinámicas respecto al modelo LuGre dado en (Canudas de Wit *et al.* 1995), lo que permite un mejor desempeño cuando se usa como compensador de fricción en sistemas de control.

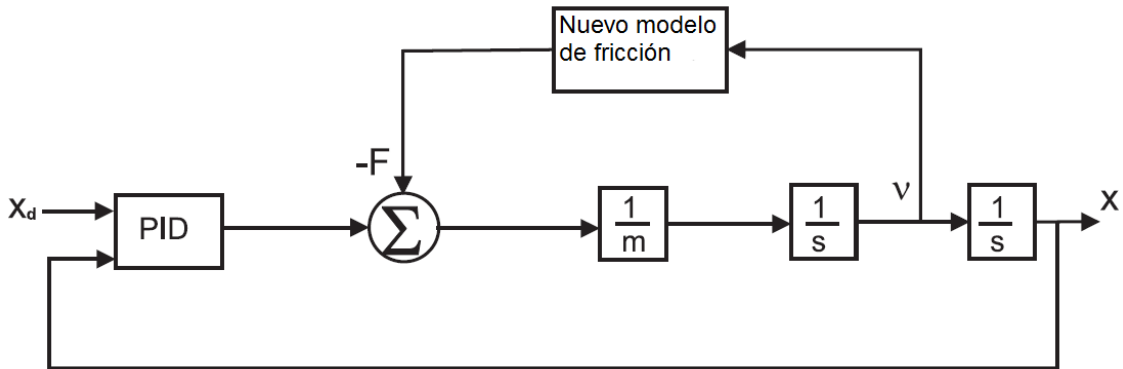


Figura 2.23: Diagrama de bloques para el sistema con fricción y control PID.

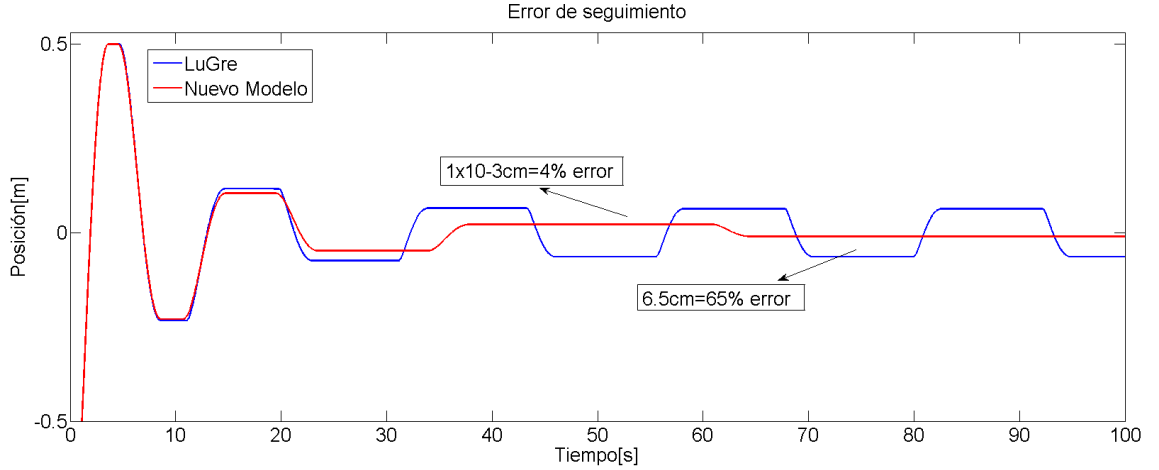


Figura 2.24: Comparación del control de posición del modelo LuGre y el nuevo modelo usando un controlador PID.

Propiedad de pasividad

Los modelos de fricción tienen propiedades de pasividad en el mapa de velocidad a fuerza de fricción. A fin de asegurar que el modelo matemático constituye un buen modelo de fricción, en esta sección se comprueba la pasividad del modelo (2.12)-(2.14).

La siguiente prueba esta inspirada por los resultados presentados en (Barabanov y Ortega 2000) para el modelo LuGre.

Proposición 1: Si $F_s \geq F_c$, el sistema dinámico descrito en (2.12)-(2.14) define un operador estrictamente pasivo $\Sigma : \varsigma_{2e} \rightarrow \varsigma_{2e} : \dot{q} \rightarrow F$, esto es, a lo largo de las soluciones (2.12)-(2.12), con condiciones iniciales cero,

$$I(0, T) = \int_0^T \dot{q} F dt > 0, \quad (2.19)$$

Prueba :

$$\begin{aligned} I(0, T) &= \int_0^T \dot{q} F dt \\ &= \int_0^T (\sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} + \sigma_0 (F_s - F_c) y + \alpha \dot{y}) dt \dot{q}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

que puede ser descompuesta como

$$I(0, T) = I_1(0, T) + I_2(0, T) + I_3(0, T) + I_4(0, T), \quad (2.21)$$

$$I_1(0, T) = \int_0^T (\sigma_1 \dot{\mathbf{z}} + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}}) dt, \quad (2.22)$$

$$I_2(0, T) = \sigma_0 F_c \int_0^T \mathbf{z} \dot{\mathbf{q}} dt, \quad (2.23)$$

$$I_3(0, T) = \alpha \int_0^T \mathbf{y} \dot{\mathbf{q}} dt, \quad (2.24)$$

$$I_4(0, T) = \sigma_0 (F_s - F_c) \int_0^T \mathbf{y} \dot{\mathbf{q}} dt, \quad (2.25)$$

Si los estados iniciales satisfacen $z(0) = y(0) = 0$, entonces, es posible acotar z y y por

$$|\mathbf{z}| = \frac{1}{\sigma_0}, \quad (2.26)$$

Y el equilibrio respectivo para (2.14) es

$$|\mathbf{y}| = \frac{1}{\sigma_0} e^{-n |\dot{\mathbf{q}}|^m}. \quad (2.27)$$

Tomando ahora (2.22), sustituyendo (2.13) y usando (2.26) se consigue

$$\begin{aligned}
I_1(0, T) &= \int_0^T (\sigma_1 \dot{\mathbf{q}} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z} + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt \\
&= \int_0^T (-\sigma_0 \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z} + (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt \\
&\geq \int_0^T (-\sigma_1 + \sigma_1 + \sigma_2) \dot{\mathbf{q}}^2 dt \\
&= \int_0^T \sigma_2 \dot{\mathbf{q}}^2 dt > 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Para (2.23), usando $z(0) = 0$, (2.13) y (2.27) se obtiene

$$\begin{aligned}
I_2(0, T) &= \sigma_0 F_c \int_0^T \mathbf{z}(\dot{\mathbf{z}} + \sigma_0 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z}) dt \\
&= \frac{\sigma_0 F_c}{2} \mathbf{z}^2(T) + \sigma_0 F_c \int_0^T \mathbf{z}^2 |\dot{\mathbf{q}}| dt > 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Para el caso de (2.24), se toma (2.14), (2.27) y $\sigma_0 > 0$ para conseguir

$$\begin{aligned}
I_3(0, T) &= \alpha \int_0^T \dot{\mathbf{y}} \dot{\mathbf{q}} dt \\
&= \alpha \int_0^T \left(-\mathbf{y} + \frac{1}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n |\dot{\mathbf{q}}|^m} \right) \dot{\mathbf{q}} dt \\
&= \alpha \int_0^T (-\dot{\mathbf{q}} + |\dot{\mathbf{q}}|) e^{-n |\dot{\mathbf{q}}|^m} dt \geq 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Finalmente para (2.25), se usa (2.14), con lo cual se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}} = \sigma_0 \frac{\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y}}{e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m} |\dot{\mathbf{q}}| \quad (2.31)$$

La sustitución de lo anterior en (2.25) y usando (2.27) y $y(0) = 0$ se consigue

$$\begin{aligned} I_4(0, T) &= \sigma_0^2 (F_s - F_c) \int_0^T \frac{\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y}}{e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m} \dot{\mathbf{y}} |\dot{\mathbf{q}}| dt \\ &\geq \sigma_0^2 (F_s - F_c) \left\{ \int_0^T \mathbf{y} \dot{\mathbf{y}} |\dot{\mathbf{q}}| dt + \int_0^T \mathbf{y}^2 |\dot{\mathbf{q}}| dt \right\} \\ &\geq \sigma_0^2 (F_s - F_c) \left\{ \int_0^T \mathbf{y}^2 |\dot{\mathbf{q}}| dt \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Este será el caso si $F_s \geq F_c \Rightarrow I(0, T) = I_1(0, T) + I_2(0, T) + I_3(0, T) + I_4(0, T) > 0$.

■

2.3. Compensación de fricción

En aplicaciones de control industrial, hay una variedad de formas para compensar el fenómeno de fricción, las cuales son clasificadas en esquemas de control sin modelo y con modelo.

2.3.1. Compensadores de fricción no basados en modelos.

Ejemplos de compensadores de fricción no basados en modelos son los clásicos controladores retroalimentados PD y PID. A pesar de que los seguidores de posición con un controlador PD son estables, el efecto stick-slip puede ocurrir a bajas velocidades. Este efecto puede ser eliminada con altas derivaciones, alta realimentación proporcional o una combinación de ambas, pero esto puede llevar a la inestabilidad del sistema y a la necesidad de un actuador con mayor potencia. Por otro lado los errores en estado estacionario pueden resolverse con un controlador integral; sin embargo su acción puede causar ciclos limites a bajas velocidades o en la velocidad cero, y puede causar otros problemas cuando un motor cambia de sentido de giro (Geffen 2009).

Otra manera muy simple de eliminar algunos efectos de la fricción es usar una señal *Dither*, que es una señal de alta frecuencia que se suma a la señal de control con el fin de suavizar la discontinuidad de la fricción a bajas velocidades. Una interesante forma de esta señal fue usada en los giroscopios para los pilotos automáticos en los años cuarenta. La señal *Dither* fue obtenida por un simple vibrador mecánico. Después de aplicar la señal dither cualquier otro esquema de fricción puede ser aplicado.

2.3.2. Compensadores de fricción basados en modelos.

El problema de compensación de fricción basado en modelo para estos servosistemas es complicado por el hecho de que los parámetros son inciertos; además para el caso de modelos de fricción dinámica, los estados internos de fricción no se encuentran disponibles para medición directa.

Para aplicar un compensador de fricción basado en un modelo se requiere que la velocidad sea medida o estimada con una buena resolución, y que los valores de los parámetros que involucran al modelo sean precisos. Los parámetros de fricción de Coulomb y fricción viscosa están presentes tanto en los modelos simples como en los más complejos (Kelly *et al.* 2000). El cálculo de estos parámetros se explicará en el Capítulo 3.

El diagrama de bloques de un compensador de fricción basado en modelos se puede generalizar como se muestra en la figura 2.25, donde el bloque F es un subsistema que contiene las ecuaciones del modelo de fricción con el que se estimará esta fuerza. Este bloque sólo recibe la velocidad (w), obtenida directamente por tacómetro o estimación de un motor representado por M y entrega un valor proporcional a la fuerza de fricción, que se suma a la señal del controlador representado por el bloque C .

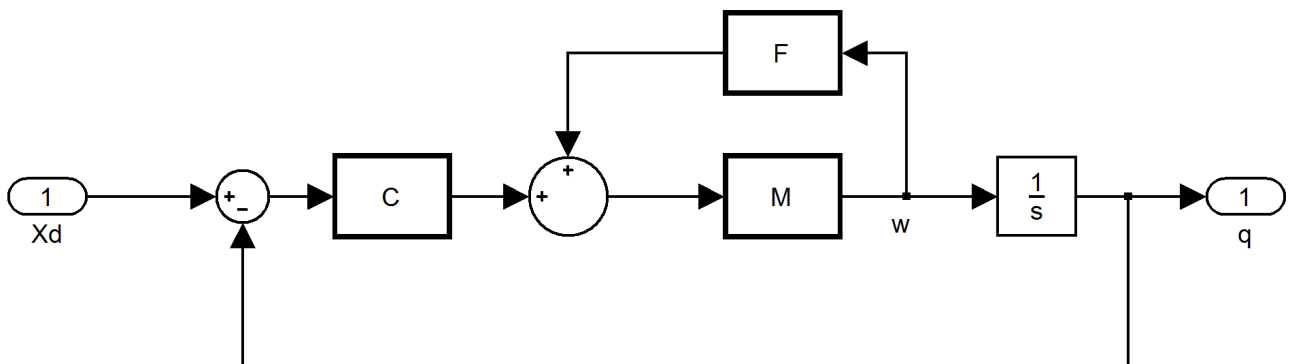


Figura 2.25: Diagrama de bloques de un servomotor con controlador PID y compensación de fricción.

2.3.3. Parametrización del nuevo modelo

La mayoría de los modelos de fricción presentados en la literatura carecen de una estructura lineal en parámetros que permita su identificación. Una de las principales ventajas de modelo (2.12, 2.13 y 2.14) consiste en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes de fricción, cuando las condiciones de operación sufren cambios con el tiempo. Esta cualidad radica en expresar el modelo (2.12, 2.13 y 2.14) como una estructura lineal en parámetros permitiendo sus aplicaciones en control avanzado e identificación paramétrica.

El modelo propuesto tiene entonces una estructura lineal en parámetros

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{P}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{z}, -|\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y}, -\mathbf{y}], \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P} = [\sigma_0 \mathbf{F}_c, \sigma_0 \sigma_1, \sigma_0 + \sigma_1, \sigma_0 (\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_c), \alpha]^T = [P1, P2, P3, P4, P5]^T \quad (2.35)$$

esta parametrización es conveniente para una identificación en línea. $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^5$ contiene los parámetros desconocidos del modelo de fricción y la matriz de regresor $\mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ contiene las funciones conocidas y medibles

Aplicación de un nuevo modelo a un motor de corriente directa con transmisión armónica

El servo sistema bajo estudio consiste en un motor de corriente directa acoplado a una transmisión armónica el cual consiste de una elevada relación de engranaje, tamaño compacto, elevada transmisión de torque e intensos efectos de fricción. El modelo matemático del servo sistema, está representado por un sistema dinámico de segundo orden con efector de fricción como sigue

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}, \quad (2.36)$$

donde \mathbf{J} es el momento de inercia, \mathbf{q} es la posición angular del servo sistema, $\boldsymbol{\tau}$ es la señal de control, y \mathbf{F} es el torque de fricción, dado por (2.12, 2.13 y 2.14).

Dado que el parámetro σ_0 es una constante y debido a que el producto o suma con σ_0 sigue siendo otra constante, se puede simplificar el modelo considerando implícitamente el valor de $\sigma_0 = 1$, con lo que el modelo de fricción (2.12, 2.13 y 2.14) tiene la siguiente

estructura para la fuerza de fricción \mathbf{F} entre dos superficies en contacto.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c \mathbf{z} + \sigma_1 \dot{\mathbf{z}} + \sigma_2 \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_c) \mathbf{y} + \alpha \dot{\mathbf{y}}, \quad (2.37)$$

donde los estados del modelo son dados por

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{q}} - |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z}, \quad (2.38)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{y} + \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m. \quad (2.39)$$

En esta sección, se presenta una estructura para propósitos de identificación, donde el parámetro n se asume conocido, implicando que la velocidad Stribeck también sea conocida.

Mediante la sustitución de 2.38 y 2.39 en 2.37, el modelo es lineal en los parámetros con estructura

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \Theta, \quad (2.40)$$

donde

$$\mathbf{U} = [\mathbf{z}, -|\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y}, \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m] \in \mathbb{R}^{5 \times 1}, \quad (2.41)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} F_c \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 \\ F_s - F_c - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}, \quad (2.42)$$

que es conveniente para una identificación en línea.

En (2.40) $\Theta \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$, contiene los parámetros desconocidos del modelo de fricción.

Asumiendo el conocimiento de los parámetros del servo actuador (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), entonces, el problema de control consiste en diseñar una ley de control, tal que logre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad (2.43)$$

donde $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d$ es el error de velocidad, y $\dot{\mathbf{q}}_d$ la velocidad deseada, es una función diferenciable.

Sustituyendo el modelo de fricción dinámica 2.40 en 2.36, se obtiene

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{U}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\Theta \quad (2.44)$$

Controlador integral adaptable

Puesto que los estados de fricción en (2.38) y (2.39) no pueden ser medidos, se propone que sean estimados. El siguiente observador adaptable se propone para estimar \mathbf{z} , \mathbf{y} y los parámetros del modelo de fricción Θ ,

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{q}} - |\dot{\mathbf{q}}| \hat{\mathbf{z}} + c_1 \mathbf{s}, \quad (2.45)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = -\hat{\mathbf{y}} + \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m + c_2 \mathbf{s} \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\theta}_1 \hat{\mathbf{z}} - \hat{\theta}_2 |\dot{\mathbf{q}}| \hat{\mathbf{z}} + \hat{\theta}_3 \dot{\mathbf{q}} + \hat{\theta}_4 \hat{\mathbf{y}} + \hat{\theta}_5 \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m \quad (2.47)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Theta} \quad (2.48)$$

con la siguiente ley de adaptación de parámetros

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\Gamma \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{s} \quad (2.49)$$

c_1 y c_2 son constantes positivas, y $\Gamma \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es una matriz positiva definida diagonal y las siguiente definiciones de error que relaciona al error de posición

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad (2.50)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \lambda \tilde{\mathbf{q}}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (2.52)$$

con $\lambda > 0$. Ahora considere el modelo (2.36) y, al definir los errores de observación y parámetros con $\tilde{z} = z - \hat{z}$, $\tilde{y} = y - \hat{y}$, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$, la dinámica en lazo cerrado se puede expresar como

$$\mathbf{J} (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{U}(z, \mathbf{y}) \Theta = \tau, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{J} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tau - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{U}(z, \mathbf{y}) \Theta, \quad (2.54)$$

Con el uso del controlador diseñado en conjunto con el nuevo modelo de fricción dinámico y realizando algunas modificaciones, se propone

$$\tau = \mathbf{J} [\ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] - k_i \boldsymbol{\xi} - k_v \mathbf{s} + \hat{\mathbf{U}}(\hat{z}, \hat{\mathbf{y}}) \hat{\Theta} \quad (2.55)$$

con $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ y $k_i > 0$, $k_v > 0$ como ganancias escalares. Utilizando (2.50) y (2.52), después de algunas manipulaciones se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r - \lambda \tilde{\mathbf{q}}, \quad (2.56)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{s} - \lambda \tilde{\mathbf{q}} = -\lambda \boldsymbol{\xi} + \mathbf{s}. \quad (2.57)$$

Sustituyendo (2.55) en (2.54), la dinámica en lazo cerrado se obtiene

$$\mathbf{J} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \left[\mathbf{J} [\ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] - k_i \boldsymbol{\xi} - k_v \mathbf{s} + \hat{\mathbf{U}}(\hat{z}, \hat{\mathbf{y}}) \hat{\Theta} \right] - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{U}(z, \mathbf{y}) \Theta, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} = -\lambda \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} - k_i \boldsymbol{\xi} - k_v \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \boldsymbol{\Theta} - \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{J} (-\lambda \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\mathbf{s}}) = -\lambda \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\xi}} - k_i \boldsymbol{\xi} - k_v \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \boldsymbol{\Theta} - \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\boldsymbol{\Theta}}. \quad (2.60)$$

Finalmente después de algunas simplificaciones,

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = -\lambda \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\xi}} - k_v \mathbf{s} - k_i \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \boldsymbol{\Theta} - \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\boldsymbol{\Theta}}, \quad (2.61)$$

donde se aplica $\hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \hat{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{U}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\Theta} = -\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \boldsymbol{\Theta} - \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\boldsymbol{\Theta}}$.

Por otro lado, de (2.38) y (2.45)

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}}, \quad (2.62)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{q}} - |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z} - \dot{\mathbf{q}} + |\dot{\mathbf{q}}| \hat{\mathbf{z}} - c_1 \mathbf{s}, \quad (2.63)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -|\dot{\mathbf{q}}| \tilde{\mathbf{z}} - c_1 \mathbf{s}. \quad (2.64)$$

Siguiendo el mismo procedimiento con (2.39) y (2.46) se obtiene

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} \quad (2.65)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = -\mathbf{y} + \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m - (-\hat{\mathbf{y}} + \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m + c_2 \mathbf{s}, \quad (2.66)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = -\tilde{\mathbf{y}} - c_2 \mathbf{s} \quad (2.67)$$

En el caso del error de estimación de parámetros,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \dot{\boldsymbol{\Theta}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}, \quad (2.68)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \boldsymbol{\Gamma} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{s} \quad (2.69)$$

En resumen, las dinámicas (2.52), (2.57), (2.62), (2.65), (2.69) tienen un único punto de equilibrio, dado por la solución de

$$0 = -\dot{\hat{\mathbf{y}}}_e - c_2 \mathbf{s}_e, \quad (2.70)$$

$$0 = -|\dot{\mathbf{q}}| \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_e - c_1 \mathbf{s}_e, \quad (2.71)$$

$$0 = -k_i \mathbf{J}^{-1} \xi_e - k_v \mathbf{J}^{-1} \mathbf{s}_e - \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_e(\tilde{\mathbf{z}}_e, \tilde{\mathbf{y}}_e) \Theta - \mathbf{J}^{-1} \hat{\mathbf{U}}_e(\hat{\mathbf{z}}_e, \hat{\mathbf{y}}_e) \tilde{\Theta}_e, \quad (2.72)$$

$$0 = -\lambda \xi_e + \mathbf{s}_e, \quad (2.73)$$

$$0 = \Gamma \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{s}_e, \quad (2.74)$$

donde $\tilde{\mathbf{U}}(0, 0) = \mathbf{0}$.

Proposición 2: Considere el sistema dinámico en (2.36), el observador adaptable en (2.45-2.48) y la ley de control en (2.55). Entonces el error de velocidad $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$, los errores de observación $\tilde{\mathbf{z}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ y las señales \mathbf{s} , Θ tenderán asintóticamente a cero.

Prueba: La dinámica de los errores está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = -\dot{\hat{\mathbf{y}}} - c_2 \mathbf{s}, \quad (2.75)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -|\dot{\hat{\mathbf{q}}}| \tilde{\mathbf{z}} - c_1 \mathbf{s}, \quad (2.76)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}^{-1} k_i \xi - \mathbf{J}^{-1} k_v \mathbf{s} - \mathbf{J}^{-1} [\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta + \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\Theta}], \quad (2.77)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}} = \Gamma \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{s}, \quad (2.78)$$

$$\dot{\xi} = -\lambda \xi + \mathbf{s}, \quad (2.79)$$

Considerando la función candidata de Lyapunov

$$\mathbf{V} = \frac{\gamma_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} + \frac{\gamma_2}{2} \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + \frac{\gamma_3}{2} \tilde{\mathbf{z}}^2 + \frac{\gamma_4}{2} \tilde{\mathbf{y}}^2 + \frac{\gamma_5}{2} k_i \xi^2 \quad (2.80)$$

con ganancias escalares $\gamma_i > 0$. El siguiente paso es calcular la derivada de la función candidata de Lyapunov en (2.80) a largo de las trayectorias del sistema (2.75)-(2.79), la cual es

$$\dot{\mathbf{V}} = \gamma_1 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} + \gamma_2 \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} + \gamma_3 \tilde{\mathbf{z}}^T \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \gamma_4 \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}} + k_i \gamma_5 \xi^T \dot{\xi}. \quad (2.81)$$

Sustituyendo (2.75)-(2.79) en (2.81) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= -\gamma_1 k_i \mathbf{s}^T \xi - \gamma_1 k_v \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \gamma_1 k_i \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta \\ &\quad - \gamma_1 \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \tilde{\Theta} + \gamma_2 \tilde{\Theta}^T \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{s} - \gamma_3 |\dot{\mathbf{q}}| \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \gamma_3 c_1 \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{s} \\ &\quad - \gamma_4 c_2 \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{s} - \gamma_4 \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}} - \gamma_5 k_i \lambda \xi^T \xi + \gamma_5 k_i \xi^T \mathbf{s}.\end{aligned}\quad (2.82)$$

Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5$ en (2.82),

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= -\gamma_1 k_v \mathbf{s}^2 - \gamma_3 |\dot{\mathbf{q}}| \tilde{\mathbf{z}}^2 - \gamma_3 c_1 \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{s} - \gamma_4 \tilde{\mathbf{y}}^2 \\ &\quad - \gamma_1 k_i \lambda \xi^2 - \gamma_1 \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta \\ &\quad - \gamma_3 c_1 \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{s} - \gamma_4 c_2 \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{s}.\end{aligned}\quad (2.83)$$

Expresando $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta$ como

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta &= \mathbf{U}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \Theta - \hat{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \Theta \\ &= F_C \mathbf{z} - \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}| \mathbf{z} + (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{\mathbf{q}} + (F_s - F_C - \alpha) \mathbf{y} + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m \\ &\quad - F_C \hat{\mathbf{z}} + \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}| \hat{\mathbf{z}} - (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{\mathbf{q}} - (F_s - F_C - \alpha) \hat{\mathbf{y}} - \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) e^{-n} |\dot{\mathbf{q}}|^m \\ &= (F_C - \sigma_1 |\dot{\mathbf{q}}|) \tilde{\mathbf{z}} + (F_s - F_C - \alpha) \tilde{\mathbf{y}}\end{aligned}\quad (2.84)$$

El término $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta$ en (2.84) puede ser descompuesto como

$$\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \Theta = [\theta_1 - \theta_2 |\dot{\mathbf{q}}|] \tilde{\mathbf{z}} + [\theta_4 - \theta_5] \tilde{\mathbf{y}} = v_1 \tilde{\mathbf{z}} + v_2 \tilde{\mathbf{y}}, \quad (2.85)$$

La sustitución (2.85) en (2.83) resulta en

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= -\gamma_1 k_v \mathbf{s}^2 - \gamma_3 |\dot{\mathbf{q}}| \tilde{\mathbf{z}}^2 - \gamma_4 \tilde{\mathbf{y}}^2 - \gamma_1 k_i \lambda \xi^2 - \gamma_1 v_1 \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{z}} \\ &\quad - \gamma_1 v_2 \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{y}} - \gamma_3 c_1 \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{s} - \gamma_4 c_2 \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{s}\end{aligned}\quad (2.86)$$

A partir del teorema de sistemas interconectados, la existencia de ganancias γ_1 tales que $\dot{\mathbf{V}} \leq 0$ se mantendrá si los menores principales de la matriz \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} k_v & 0 & -v_1 & -v_2 \\ 0 & k_i \lambda & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & |\dot{\mathbf{q}}| & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \xi \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{V} \leq [\mathbf{s} \quad \xi \quad \tilde{\mathbf{z}} \quad \tilde{\mathbf{y}}], \quad (2.88)$$

son positivos con $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$. Por consiguiente, los escalares γ_1 y la matriz Γ existen, tales que $V \leq 0$. Usando el lema de Barbalat, es posible mostrar que conforme $t \rightarrow \infty$,

$$s \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0, \tilde{y} \rightarrow 0, \tilde{z} \rightarrow 0. \quad (2.89)$$

Existen otros modelos de fricción e identificación de parámetros adicionales a los presentados, no empleados en el desarrollo de este capítulo como el modelo de los 7 parámetros (Armstrong *et al.* 1994), el modelo Bliman-Sorine (Canudas de Wit y Lischinsky 1997), el modelo Leuven (Lampaert *et al.* 2002), el modelo Frenker-Kotorova (Braun y Kivshar 1991), el modelo Maxwell de deslizamiento (Al-Bender *et al.* 2005), entre otros.

Capítulo 3

Medición de velocidad y compensación de fricción usando un modelo estático

En este capítulo se describe la realización de los experimentos realizados, así como sus resultados, la teoría empleada fue presentada en el capítulo 2.

El sistema utilizado se compone de un par de motores con transmisión armónica (Apéndice C), alimentados por una etapa de potencia (Apéndice A). Los algoritmos se ejecutan en una PC que está conectada a una tarjeta de adquisición de datos Q8-USB (Apéndice B).

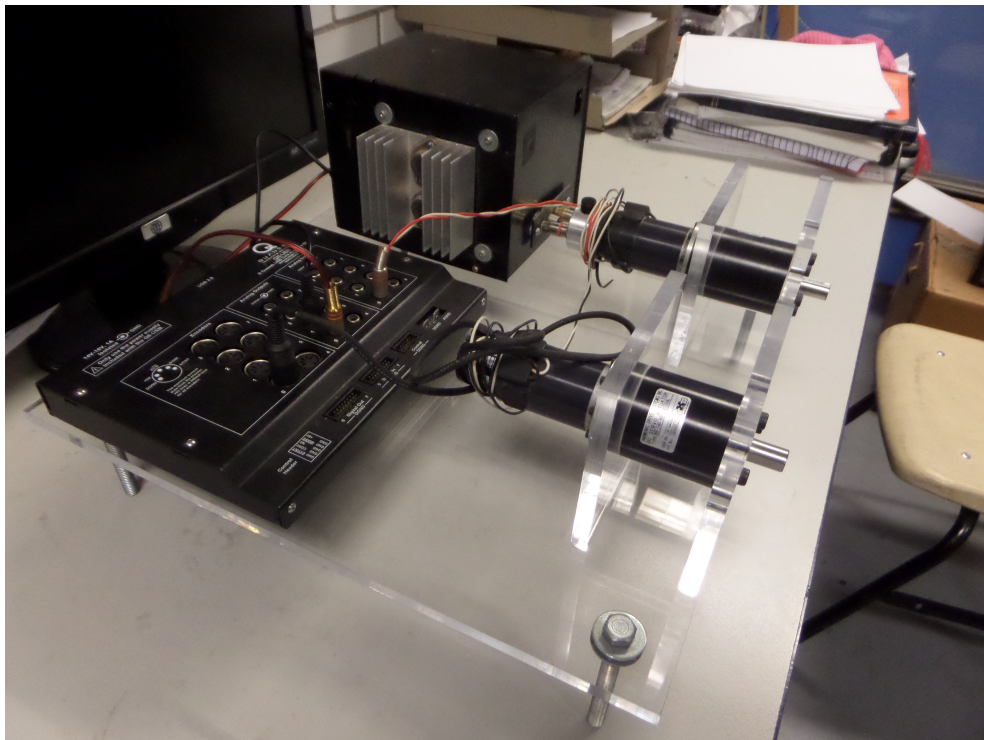


Figura 3.1: Fotografía del sistema completo

3.1. Obtención de la velocidad

Algo muy importante para poder aplicar cualquier modelo de fricción es conocer la velocidad. Para ello se realizaron diferentes métodos para lograr obtener una señal de velocidad útil. Entre los que se emplearon: derivación numérica de una señal de posición, un diferenciador robusto, un estimador de velocidad y la medición de la velocidad con un tacómetro. Se evitó el uso de filtros para evitar efectos de desfase entra la señal real y la señal que se usará en la implementación del control.

Derivando la señal de posición proveniente de un encoder incremental con una resolución de 1000pulsos/rev se obtuvo una señal muy ruidosa como se puede apreciar en la siguiente figura.

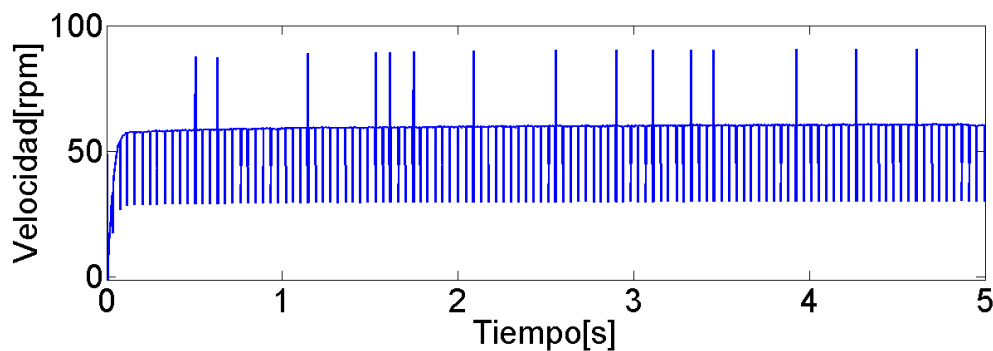


Figura 3.2: El ruido que se produce con el bloque de derivada es demasiado para realizar algún experimento

Aplicando un diferenciador robusto a la misma señal de posición de la gráfica anterior se logro tener un mejor resultado como se aprecia en la figura 3.3 ya que la variación de la medición es menor en comparación con la figura 3.2.

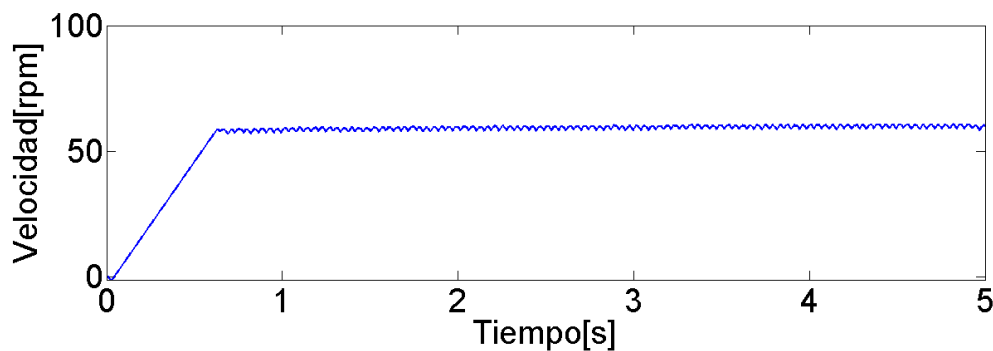


Figura 3.3: Señal de velocidad usando un diferenciador robusto

Utilizando un estimador de velocidad se obtuvo la señal de la figura 3.4, el problema de este método es el tiempo de procesamiento que utiliza, haciendo al sistema en general más lento y llevando a veces al mismo sistema operativo a singularidades numéricas.

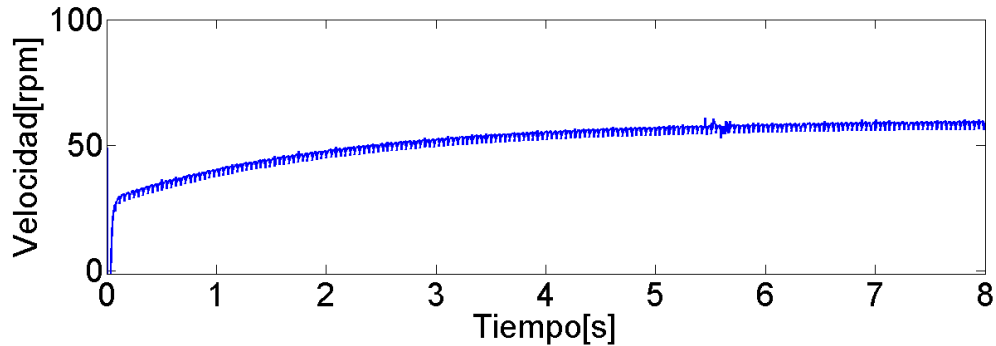


Figura 3.4: Señal de velocidad calculada con observador de velocidad

Comparando todas las señales en una misma gráfica (figura 3.5), se puede apreciar que la mejor señal de velocidad obtenida es la del diferenciador robusto.

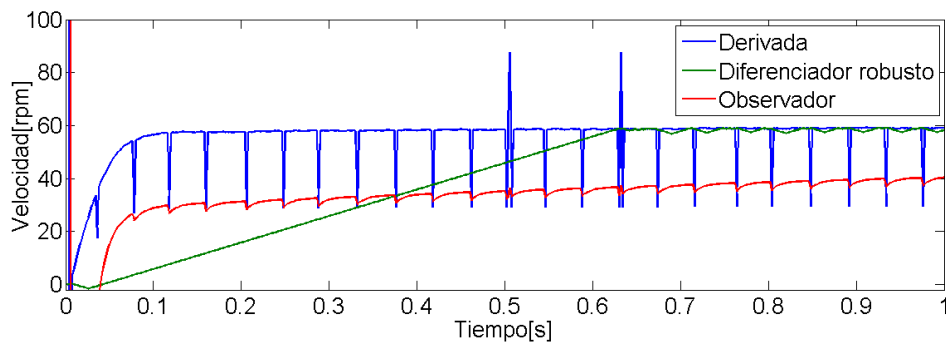


Figura 3.5: Comparación de las señales de velocidad del encoder

Se realizó un sensado por medio de un tacómetro con una resolución de $3V/1000rpm$, la cual arrojó la gráfica de la figura 3.6 se obtuvo una variación de la velocidad de apenas $0.1V$, haciendo ésta última la mejor opción para la realización de los experimentos.

La señal mejora agregando un filtro pasabajos tipo elíptico de primer orden con una frecuencia $20 rad/s$ en el límite de la banda de paso, un rizo en la banda de paso de $2dB$ y una atenuación de $200dB$ en la banda de supresión, el resultado se aprecia en la figura 3.7.

Haciendo una comparación en la figura 3.8 podemos observar que la señal con el filtro es más estable, pero proporciona una respuesta desfasada.

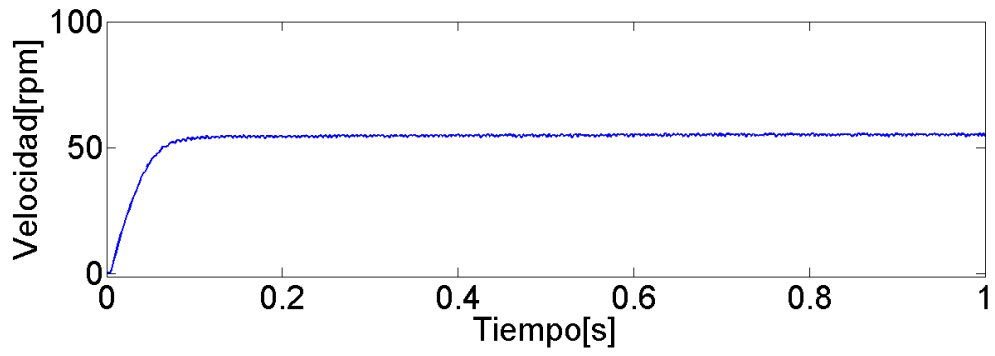


Figura 3.6: Señal de velocidad generada por el tacómetro

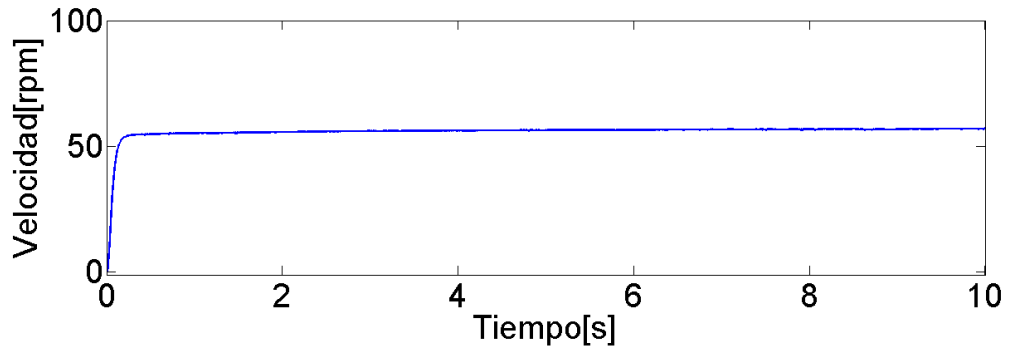


Figura 3.7: Señal de tacómetro filtrada

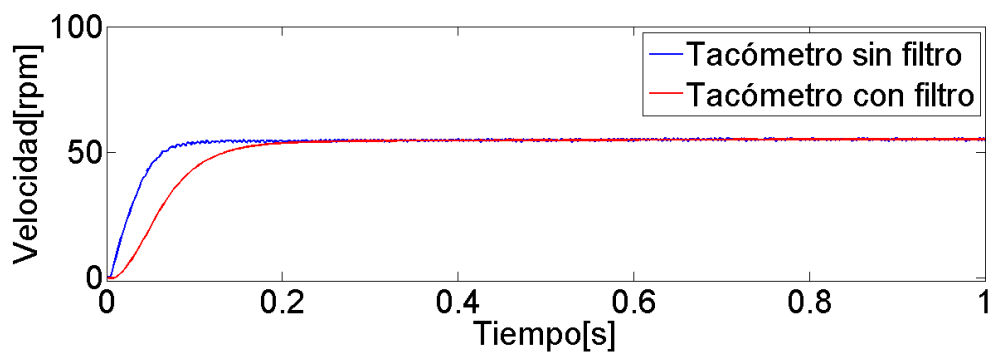


Figura 3.8: Señal de velocidad generada por el tacómetro.

3.2. Obtención de los coeficientes de fricción viscosa y fricción de Coulomb mediante el método de Kelly

Cómo se dijo en el capítulo anterior, por más complejo que sea el modelo de fricción requiere de los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb. Una forma sencilla es usando el método (Kelly *et al.* 2000), donde se prueba que los parámetros de la fricción viscosa y de Coulomb se pueden obtener gráficamente aplicando un torque con una función rampa de diferentes pendientes utilizando la siguiente relación que convierte una señal de torque a una señal de voltaje.

$$V = \frac{\tau R_a}{K_a r_m} \quad (3.1)$$

Donde V es el voltaje correspondiente a la señal de torque τ , R_a es la resistencia de armadura del motor, K_a es la constante motor-par y r_m es la relación de engranes.

Al excitar al motor con una pendiente de 4 Nm/s se obtuvo la siguiente gráfica

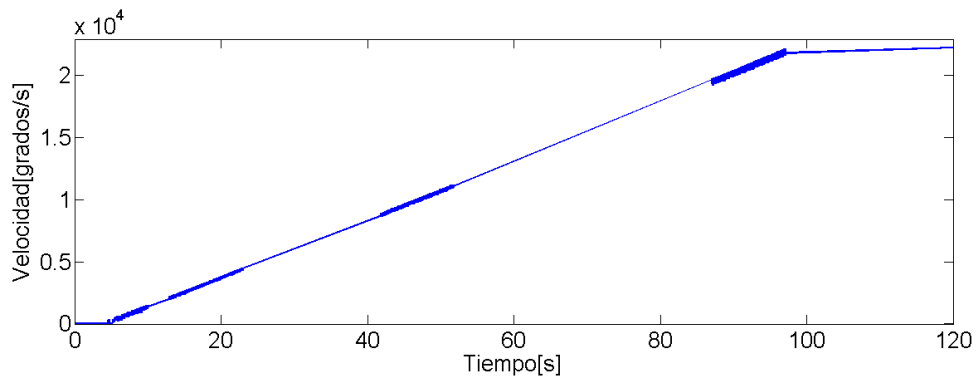


Figura 3.9: Respuesta de velocidad del motor con una pendiente de 4 Nm/s en la entrada

Posteriormente se excitó al motor con una pendiente de 20 Nm/s se obtuvo la Figura 3.10.

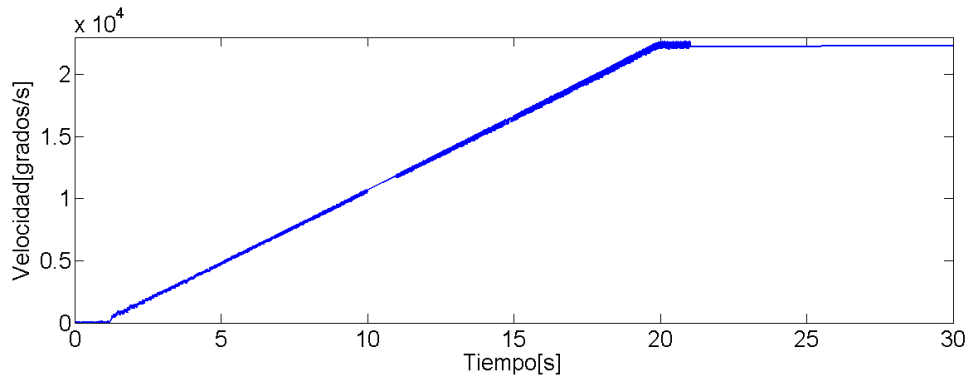


Figura 3.10: Respuesta de velocidad del motor con una pendiente de 20 Nm/s en la entrada

En las figuras 3.9 y 3.10 se observó el comportamiento descrito en (Kelly *et al.* 2000), el cual es el siguiente.

1. **Fase 1:** La velocidad permanece alrededor de cero por un tiempo y de pronto crece rápidamente.
2. **Fase 2:** Una vez que la velocidad crezca abruptamente, permanece constante o incluso decrece por un corto periodo de tiempo.
3. **fase 3:** Si se deja pasar mucho tiempo, la velocidad incrementa aparentemente de una forma lineal, hasta llegar al límite de su velocidad.

En este procedimiento se usan dos constantes a y b , las cuales se obtienen gráficamente al trazar una línea imaginaria $-b$ es el punto donde la línea cruza el eje y , $\frac{a}{b}$ se encuentra en el cruce por cero.

Para graficar esta línea se tomó una porción de la respuesta donde se comporta de manera lineal. A partir de esa sección se buscó una ecuación de recta aproximada usando la función $\text{polyfit}(X, Y, N)$ de *MATLAB*, donde X es el vector de tiempo que corresponde al segmento de interés, Y es el vector de magnitud en el eje de las ordenadas de la respuesta y N es el orden del polinomio resultante; en este caso al tratarse de una recta es de orden 1, la función entrega un vector de la forma $[pb]$ que corresponde a una ecuación de la forma $\dot{q} = pt + b$, donde p es la pendiente de esta recta (no confundir con la pendiente de voltaje con la que se excitó al motor).

Para el caso con una pendiente de 4 Nm/s se obtuvo una recta que corresponde a la ecuación $\dot{q} = 233,0691t - 960,4949$, en la figura 3.11 se puede observar sobrepuesta a la gráfica obtenida experimentalmente.

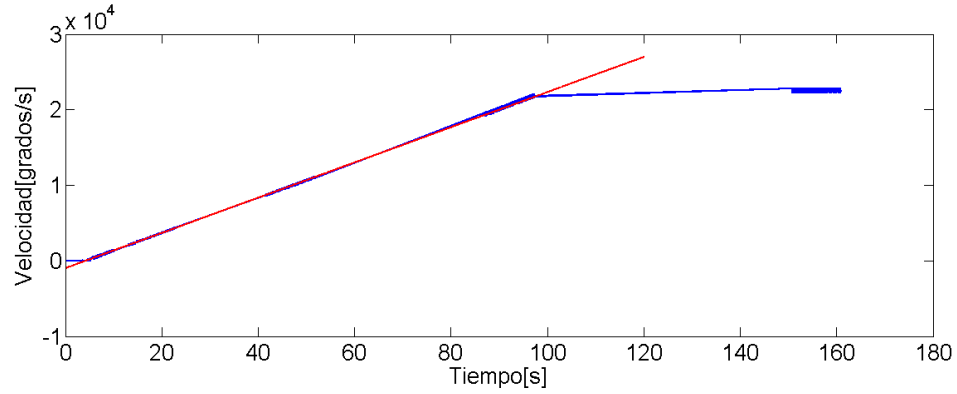


Figura 3.11: Recta aproximada a la velocidad de motor al introducirle una pendiente de 4 Nm/s

Conociendo la ecuación de la recta se puede deducir que como $-b$ es el punto donde la línea cruza el eje y por lo tanto $b = 960,4949 \text{ grados/s}$, a es una relación trigonométrica mostrada en la ecuación (3.2).

$$a = \sqrt{p^2 - 1} \quad (3.2)$$

Para este caso la ecuación da como resultado $a = 233,0669 \text{ grado/s}^2$. Conociendo a , b y m se puede calcular los coeficientes de fricción de Coulomb (f_c) y fricción viscosa (f_v), mediante

$$f_c = \frac{b}{a} m, \quad (3.3)$$

$$f_v = \frac{m}{a}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo los valores obtenidos de la recta se obtiene que $f_c = 16,4844 \text{ Nm}$ y $f_v = 17,1625 \times 10^{-3} \text{ Nms/rad}$

Para el caso con una pendiente de 20 Nm/s se obtuvo la recta que corresponde a la ecuación $\dot{q} = 1174,2t - 1096,2$, en la Figura 3.12 se puede observar sobrepuesta a la gráfica obtenida experimentalmente.

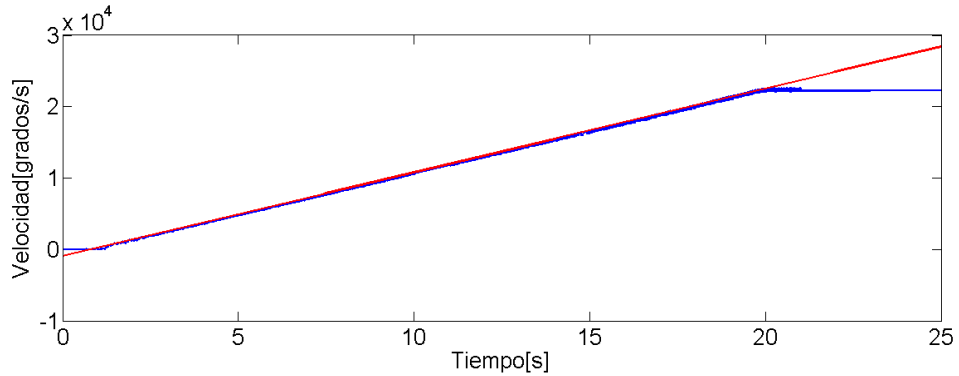


Figura 3.12: Recta aproximada a la velocidad de motor al introducir un torque de 20 Nm/s .

Utilizando las Ecuaciones (3.2-3.4) se obtiene los siguiente valores $a = 1174,2$, $f_c = 18,6714 \text{ Nm}$ y $f_v = 17,0329 \times 10^{-3} \text{ Nm s/rad}$.

Ambos valores obtenidos son similares, se tomó un promedio entre ambos y se implemento en un motor de transmisión armónica un compensador de fricción usando el modelo estático de fricción viscosa+Coulomb (figura 3.13) visto en el capítulo 2 y un controlador PD, usando una señal deseada de $3\pi \text{ rad}$. Se realizaron dos experimentos el primero sin la compensación (figura 3.14), y el segundo con la compensación de fricción figura 3.15.

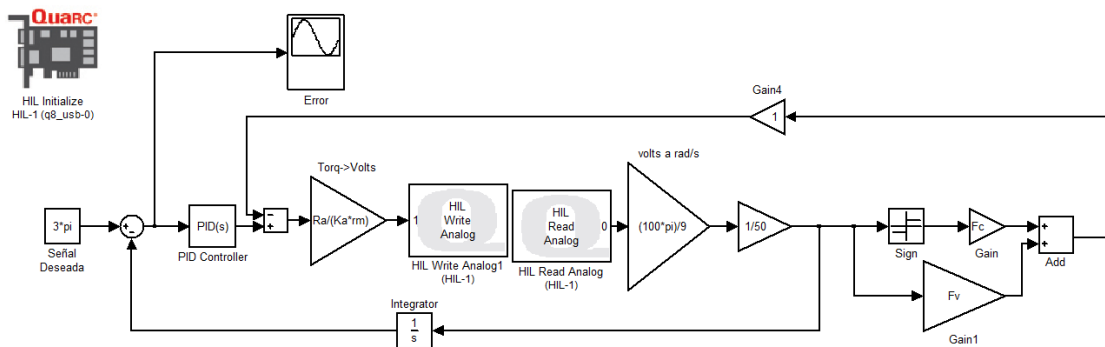


Figura 3.13: Diagrama de bloques del compensador de fricción viscosa+Coulomb.

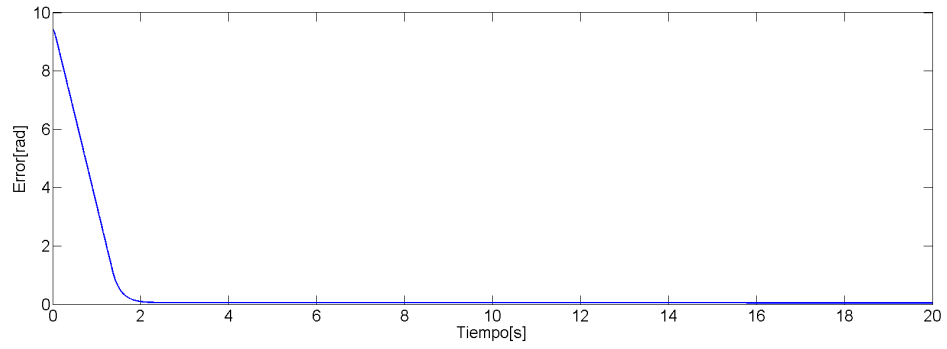


Figura 3.14: Error del controlador sin compensación de fricción

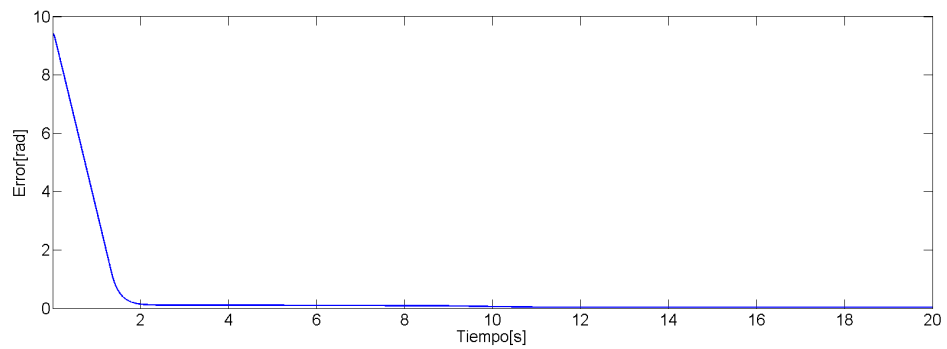


Figura 3.15: Error del controlador con compensación de fricción viscosa+Coulomb

Se puede observar una mejora en el sistema con compensación (figura 3.15) en comparación con el mismo sistema pero sin la compensación de fricción (figura 3.14), en la figura 3.16 se pueden observar la diferencia entre las dos señales de error, el sistema sin compensación tiene un error de $0,05 \text{ rad}$, mientras que con la compensación la señal de error es de $0,0343 \text{ rad}$.

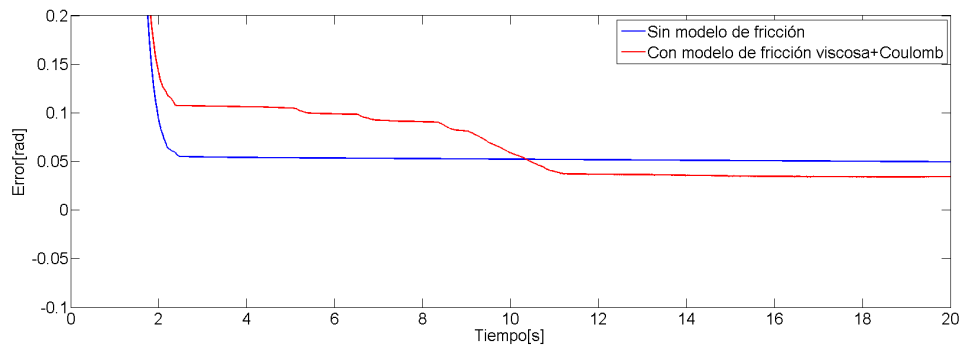


Figura 3.16: Comparación de las dos señales de error con y sin compensación de fricción viscosa + Coulomb

Este método es una forma sencilla de compensar los mayores efectos de la fricción. Pero como se ha dicho anteriormente, los parámetros pueden cambiar con el tiempo ocasionando efectos indeseados.

Capítulo 4

Experimentos de Fricción usando el Nuevo Modelo

Se realizaron tres experimentos implementando el nuevo modelo en el motor de transmisión armónica con tacómetro acoplado descrito en el apéndice C. La señal deseada en el primer experimento es una señal senoidal con un periodo de 4s, en el segundo experimento la señal deseada tiene un periodo de 20s. Por último se utilizó el mismo algoritmo con una referencia de posición fija en 540°.

Para implementar el algoritmo se usó el programa *SIMULINK* de *MATLAB*, el diagrama de bloques de dicho programa se muestra en la figura 4.1.

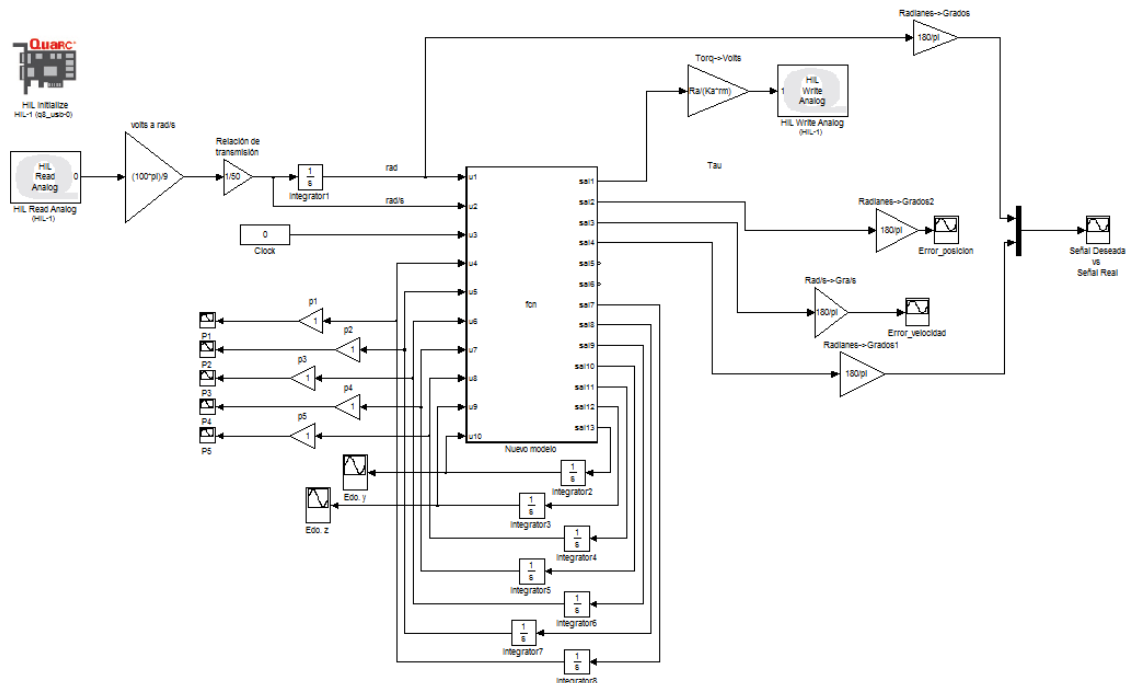


Figura 4.1: Diagrama de bloques del nuevo modelo de fricción.

Donde el bloque llamado *fcn* es una *Embedded MATLAB Function* que contiene la parametrización del nuevo modelo (sección 2.3.3) y el Controlador integral adaptable vistas en el capítulo 2, el paso de integración en los experimentos es de 0,002 .

4.1. Experimento usando una señal con un periodo de 4s

Al excitar al motor de corriente directa con una señal senoidal de 4 s de periodo con un controlador proporcional derivativo se obtuvo como resultado una señal de error 2° como se aprecia en la figura 4.2, pero al aplicar la parametrización se obtiene un error de 0.013° como se puede apreciar en la figura 4.3.

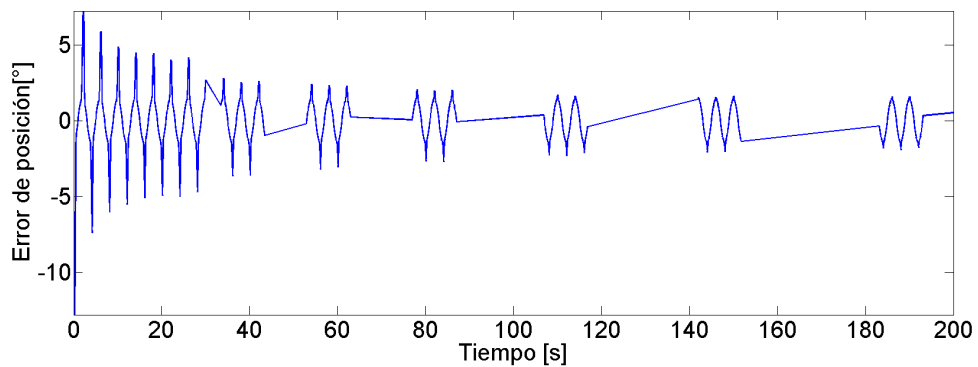


Figura 4.2: Error sin la estimación de parámetros.

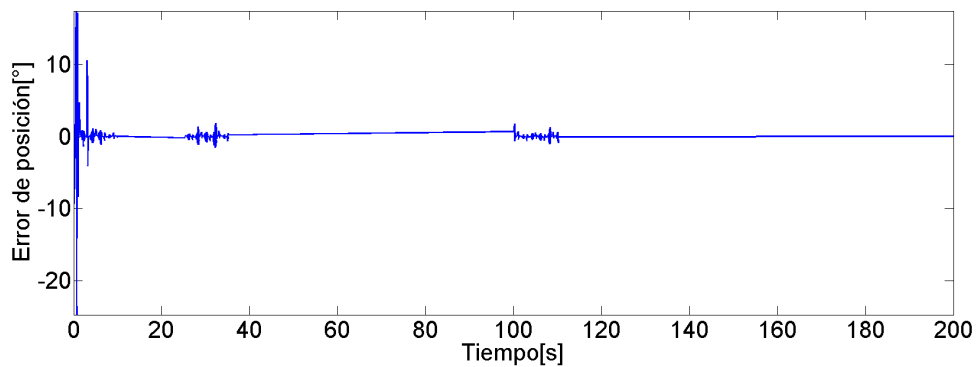


Figura 4.3: Error con la estimación de parámetros para una señal de periodo de 4 s

Conforme pasa el tiempo, los parámetros tienden a converger como se observa en las siguientes figuras: el parámetro 1 (figura 4.4), el parámetro 2 (figura 4.5), el parámetro 3 (figura 4.6), el parámetro 4 (figura 4.7) y el parámetro 5 (figura 4.8).

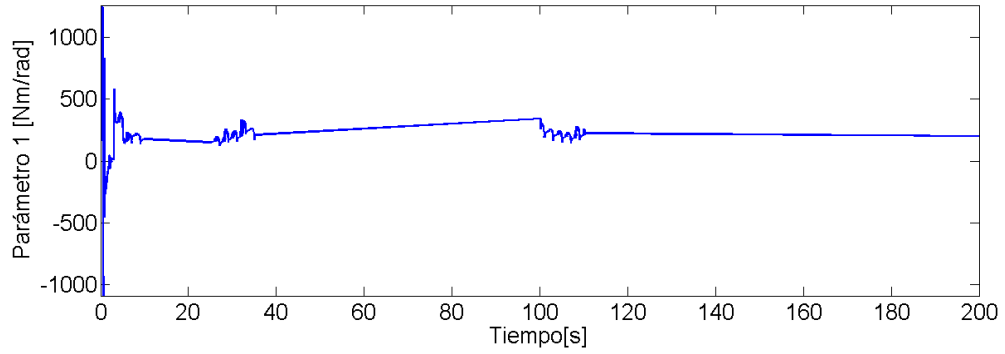


Figura 4.4: Parámetro 1 para un señal de 4 s de periodo

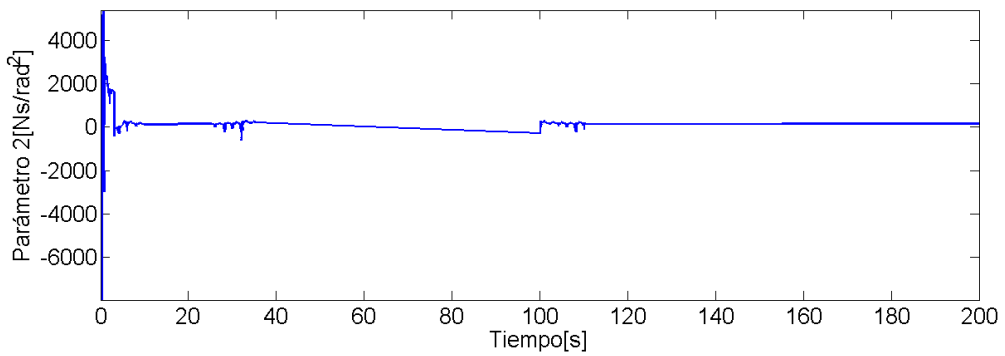


Figura 4.5: Parámetro 2 para un señal de 4 s de periodo

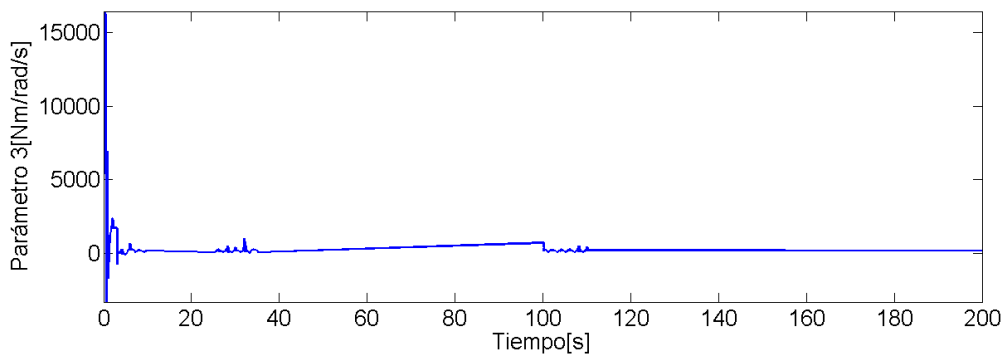


Figura 4.6: Parámetro 3 para un señal de 4 s de periodo

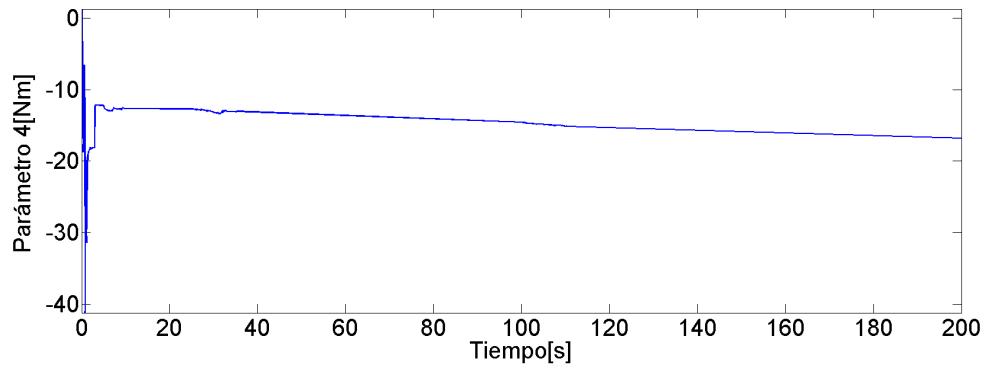


Figura 4.7: Parámetro 4 para un señal de 4 s de periodo

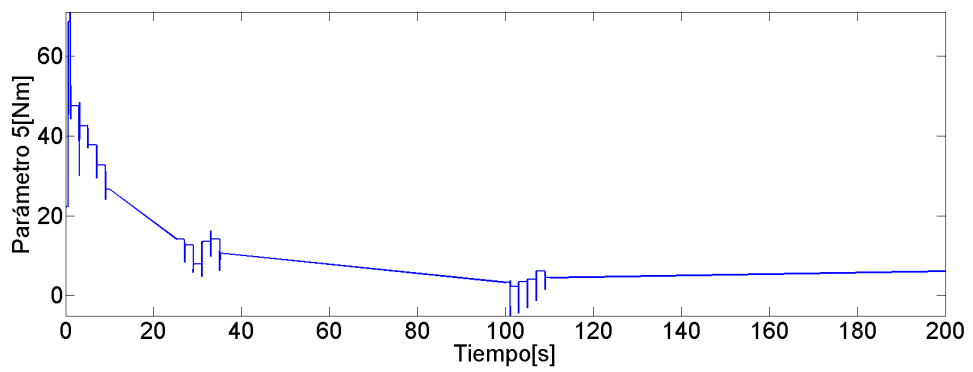


Figura 4.8: Parámetro 5 para un señal de 4 s de periodo

4.2. Experimento usando una señal con un periodo 20s

Se realizo el mismo experimento con un periodo más largo, lo que implica menor frecuencia, sin la estimación de parámetros se obtuvo una señal de error de $0,4^\circ$ mostrada en la figura 4.9.

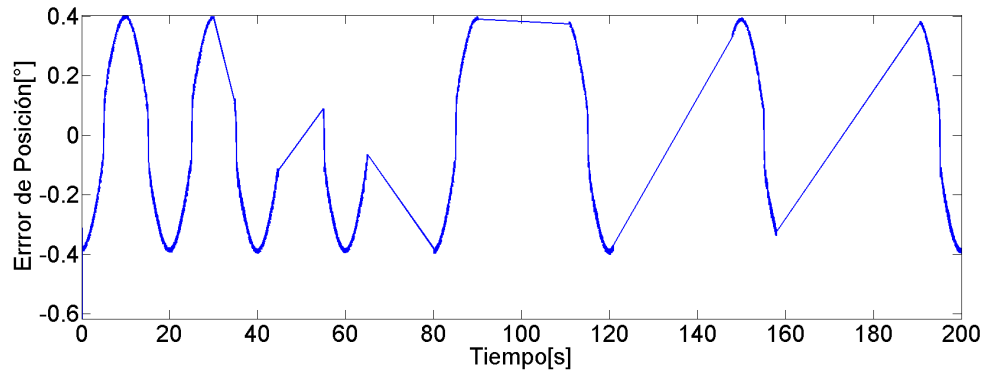


Figura 4.9: Error con la estimación de parámetros para una señal con periodo de 20 s.

Igual que en el experimento anterior con la parametrización se puede observar una señal de error más pequeña (figura 4.10) con un valor de $0,05^\circ$.

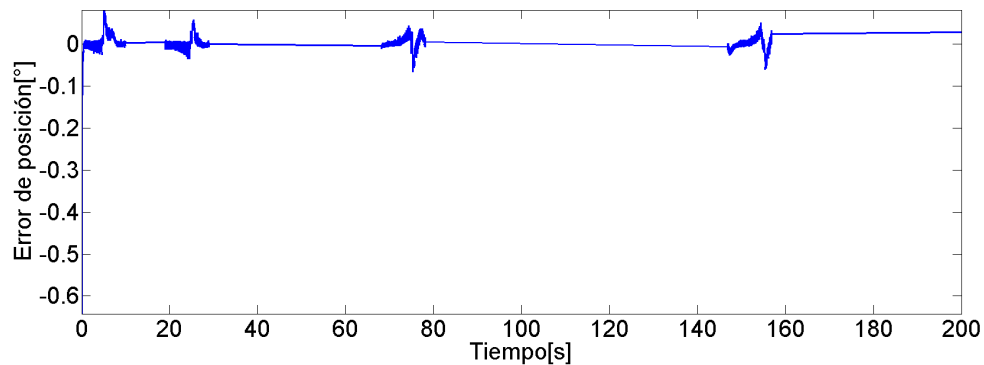


Figura 4.10: Error con la estimación de parámetros para una señal con periodo de 20 s

A pesar de que el resultado es mejor, el algoritmo no logra estimar del todo los parámetros debido a la pobre excitación que proporciona la señal deseada, esto lo podemos observar en las figuras 4.11, 4.12, 4.13, pero en el parámetro 4 mostrado en la figura 4.14 podemos observar menor oscilación y se puede observar en la figura 4.15 que el parámetro 5 tiende a converger.

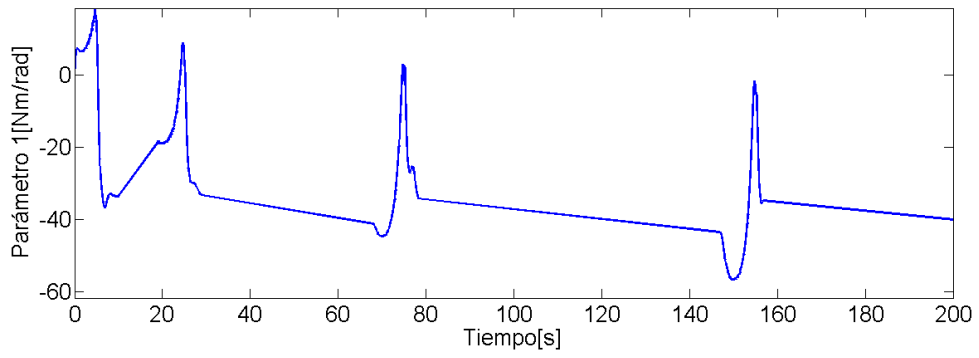


Figura 4.11: Parámetro 1 para un señal de 20 s de periodo

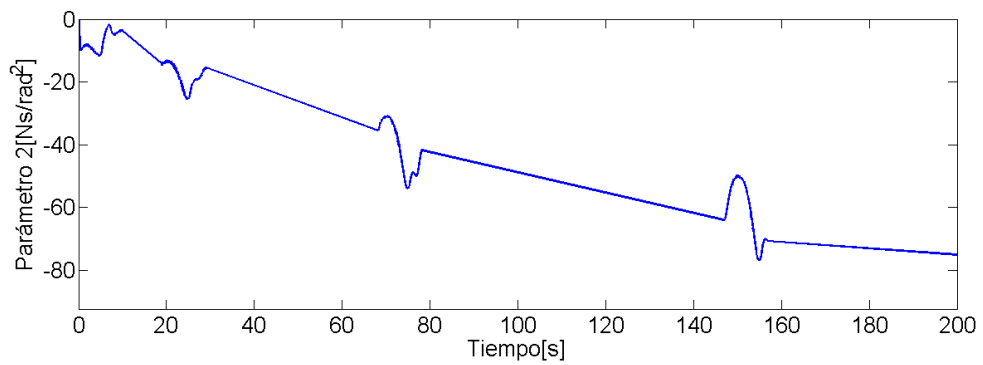


Figura 4.12: Parámetro 2 para un señal de 20 s de periodo

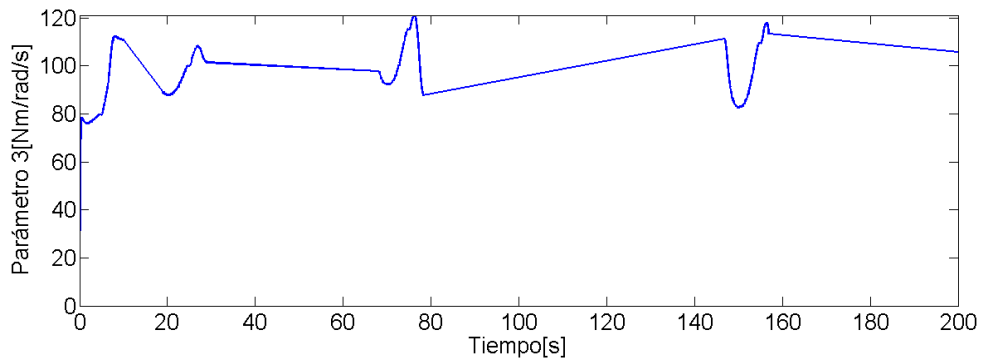


Figura 4.13: Parámetro 3 para un señal de 20 s de periodo

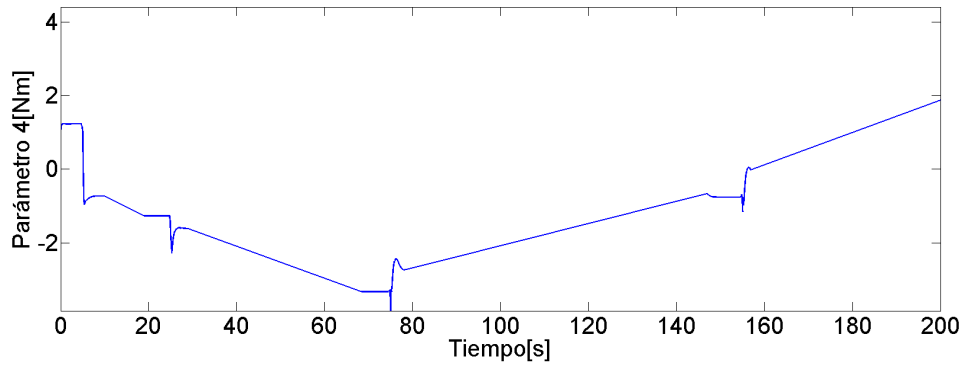


Figura 4.14: Parámetro 4 para un señal de 20 s de periodo

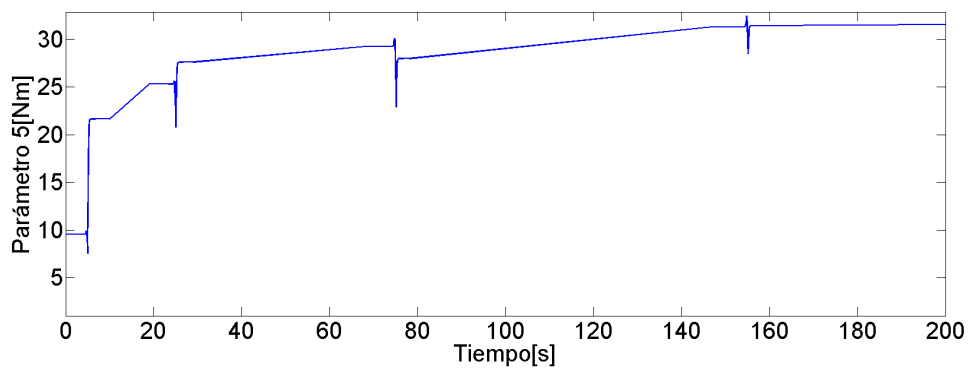


Figura 4.15: Parámetro 5 para un señal de 20 s de periodo

4.3. Experimento con una posición fija

Por último se introdujo una señal deseada fija de 540° .

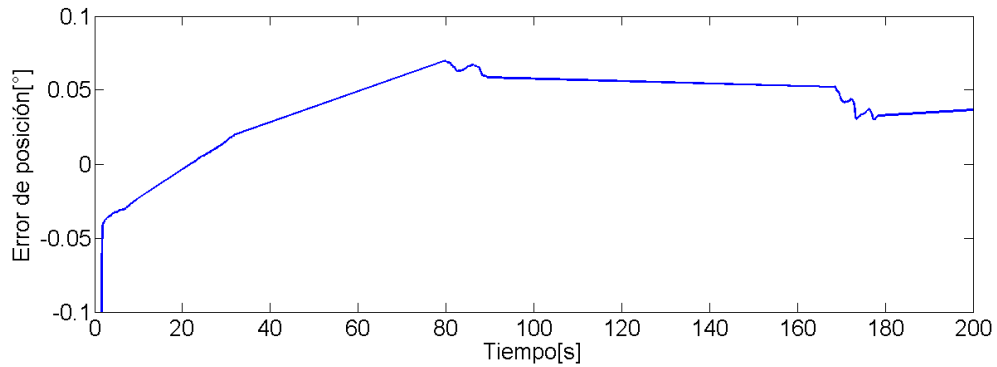


Figura 4.16: Acercamiento a la señal de error sin estimación de parámetros para una señal deseada constante

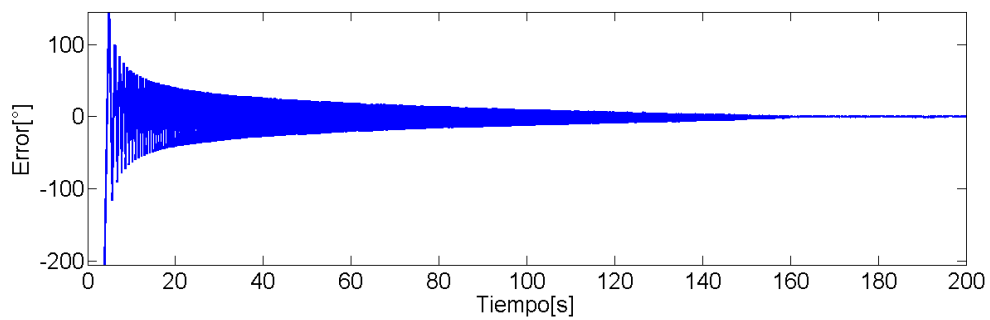


Figura 4.17: Acercamiento a la señal de error con estimación de parámetros para una señal deseada constante

En el experimento sin parametrización se obtuvo un resultado con un error de apenas $0,05^\circ$ como se observa en la figura 4.16, con la estimación de parámetros se obtuvo una señal de error oscilatoria decreciente como se observa en la figura 4.17, después de 200 s la señal de error llegó a $0,5^\circ$.

El parámetro 1 (figura 4.18), el parámetro 2 (figura 4.19), el parámetro 3 (figura 4.20) y el parámetro 4 (figura 4.21) se saturados, el parámetro 5 (figura 4.22) oscila entre $4000 Nm$ y $4500 Nm$, con lo que se puede concluir que la parametrización no se está llevando a cabo de manera adecuada, lo cual era de esperarse ya que este tipo de algoritmos necesita de excitación persistente para funcionar.

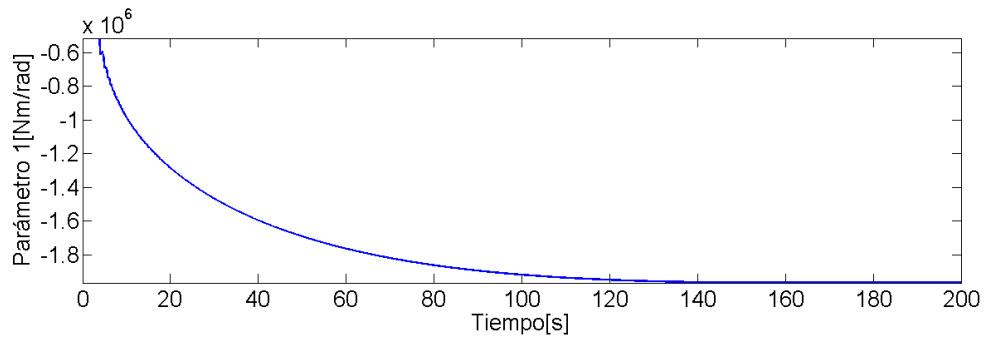


Figura 4.18: Parámetro 1 para un señal estática

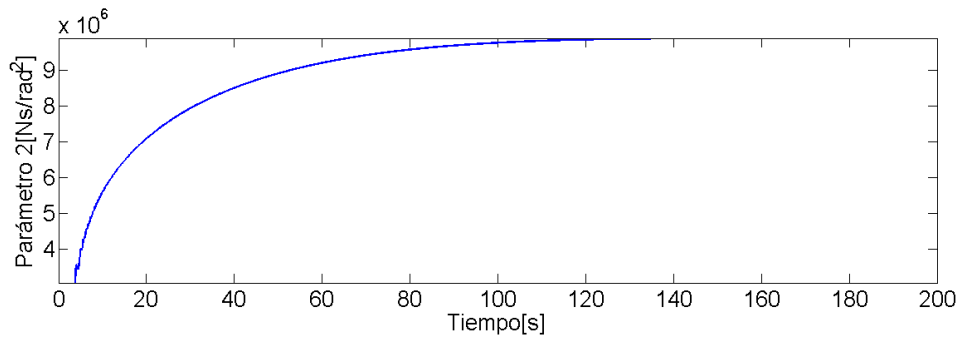


Figura 4.19: Parámetro 2 para un señal estática

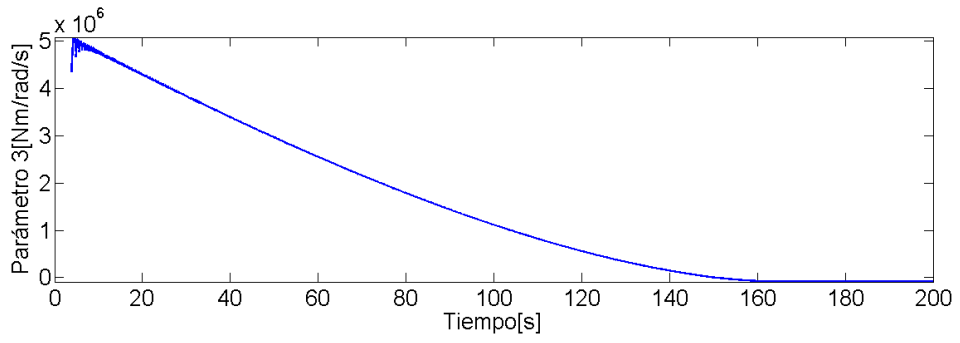


Figura 4.20: Parámetro 3 para un señal estática

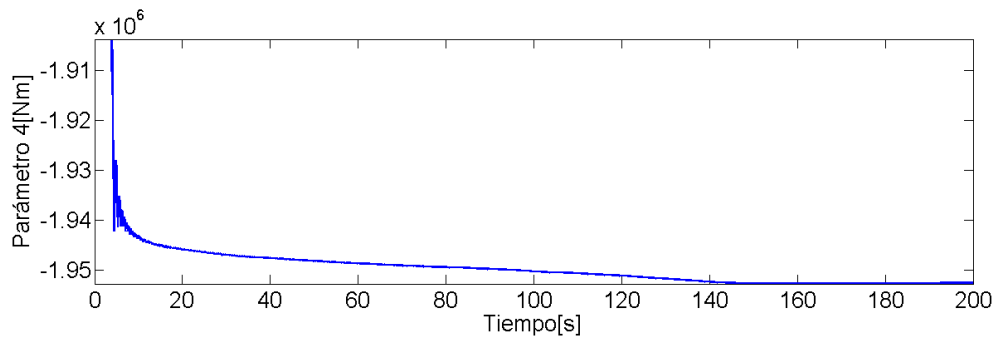


Figura 4.21: Parámetro 4 para un señal estática

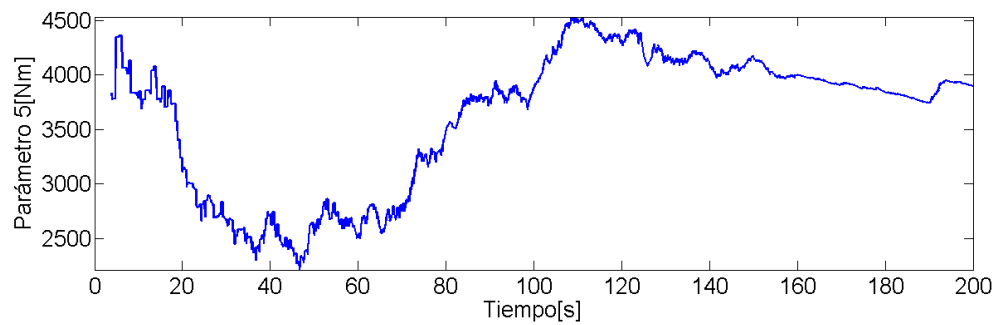


Figura 4.22: Parámetro 5 para un señal estática

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se presentan diferentes modelos de fricción y la evaluación experimental de dos modelos uno estático y uno dinámico.

Se concluye que la construcción de un sistema para evaluación y experimentación de fricción, funciona de manera satisfactoria y permite que de manera sencilla y práctica se lleven a cabo el desarrollo e implementación de nuevos modelos de fricción para la enseñanza superior e investigación.

Con Respecto a la construcción de dos diferentes modelos de fricción utilizados como detectores de fricción en motores comúnmente utilizados como actuadores en articulaciones de robots. Se llevaron a cabo principalmente dos evaluaciones experimentales, la primera, utilizando un nuevo esquema de fricción dinámico y la segunda un esquema estático de fricción.

Un nuevo modelo de fricción dinámico fué utilizado para encontrar en línea los parámetros del modelo de fricción mediante un esquema adaptable, lo cual fue posible debido a la estructura lineal de los parámetros del nuevo modelo. Tal modelo es un modelo de segundo orden, que ofrece la mismas propiedades que el conocido modelo de LuGre. Sin embargo, el nuevo modelo, permite recuperar las fuerzas de fricción estáticas y de Coulomb. Ofreciendo la ventaja de identificar los parámetros más relevantes de fricción en tiempo real, mediante el uso de algoritmos de adaptación estándar. Los resultados obtenidos presentaron un comportamiento de compensación y control de la fricción en un motor de transmisión armónica, el cual por su naturaleza contiene altos niveles de fricción. Sin embargo en control de movimiento se observó que los niveles de fricción fueron satisfactoriamente reducidos y compensados con respecto al modelo estático. Era de esperar dicho resultado, puesto que una estructura adaptable requiere de excitación persistente para garantizar una satisfactoria adaptación.

Por otro lado, el modelo estático fue obtenido mediante una caracterización de los coeficientes viscoso y de Coulomb, utilizando el método de (Kelly *et al.* 2000). Con lo cual pudo hacerse una compensación y control de la fricción, resultando que para efectos de regulación su operación es satisfactoria, sin embargo para efectos de control de movimiento, el modelo dinámico es el que mejores resultados presentó.

Es importante mencionar que el modelo de fricción dinámico, tiene la posibilidad de operar y detectar los diferentes niveles de fricción articular en prácticamente cualquier condición de operación. Ello le permite ser superior en resultados para control de movimiento. En tareas de robótica donde una efectiva compensación de fricción es necesaria, son los algoritmos de fricción dinámicos los que permitirían un mejor desempeño en su operación, debido a que sus parámetros tienen la plasticidad de cambiar con el tiempo debido a factores externos o variaciones de condiciones de operación como temperatura, polvo, humedad, vibración, entre otras.

Apéndice A

Etapa de potencia

Debido a que una tarjeta de adquisición de datos entrega voltaje y una señal de corriente muy pequeña, requerimos de una etapa de potencia que aumente el nivel de la señal tanto en corriente como en voltaje.

Las características necesarias se toman a partir de las especificaciones de la tarjeta de adquisición de datos (ver Apéndice B) y de los motores. La tarjeta de adquisición de datos Q8-USB tiene la posibilidad de entregar $\pm 10 V$ y una corriente de $20 mA$, mientras que los motores soportan un voltaje máximo de $24 V$ de corriente directa, por lo tanto se hace necesario amplificar la señal de voltaje, 2,4 veces para obtener la máxima potencia de los motores, para ello se decide por una amplificación variable.

La amplificación de voltaje se llevó a cabo con un amplificador operacional de alto voltaje (OPA445), en configuración no inversora con un resistor de precisión de $1 K\Omega$ y un resistor variable de $5 K\Omega$ en la realimentación dando un factor de amplificación deseado, en este caso se optó por un factor variable de 1 hasta 6. Por otro lado, para la protección de la tarjeta se colocó otro amplificador operacional de alto voltaje en configuración seguidor de voltaje.

Para amplificar la corriente se usó un circuito push-pull de simetría complementaria, un transistor PNP (MJ15004G) para los ciclos negativos y para los ciclos positivos con un transistor NPN (MJ15003G). Por otro lado, éstos transistores ofrecen una distorsión de cruce muy pequeña. Para protección contra transitorios se colocó un diodo de potencia en cada uno de los transistores.

En la figura A.1 se muestra un diagrama eléctrico realizado en el software ISIS de PROTEUS del sistema completo, donde una terminal del motor se conecta en la salida de la etapa de potencia y la otra regresa a tierra a través de un par de resistores de $0,12 \Omega$ conectados en paralelo dando una resistencia total de $0,06 \Omega$ la cual se usa para poder medir la corriente por medio de una entrada analógica de la tarjeta Q8-USB.

A partir del diagrama eléctrico se construyó una tarjeta de circuito impreso (*PCB* por sus siglas en inglés) en una placa fenólica de $10 X 10 cm$ de doble cara, usando el método *press&Peel*, tomando en consideración un disipador de calor para los transistores que son

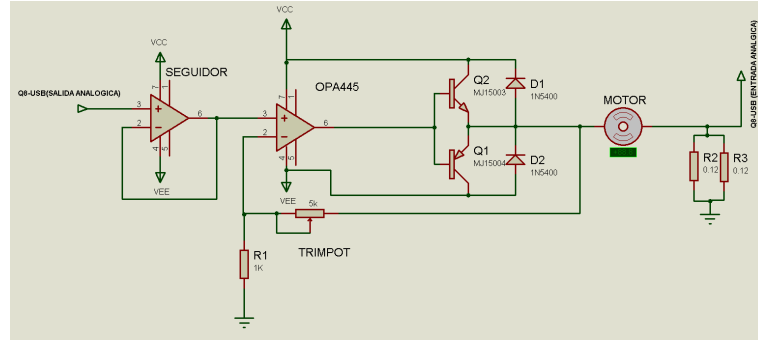


Figura A.1: Diagrama eléctrico de la etapa de potencia conectada a un motor de corriente directa.

de encapsulado tipo TO-3.

Las pistas para la etapa de potencia se realizaron en el software ARES de PROTEUS como se observa en las siguientes figuras.

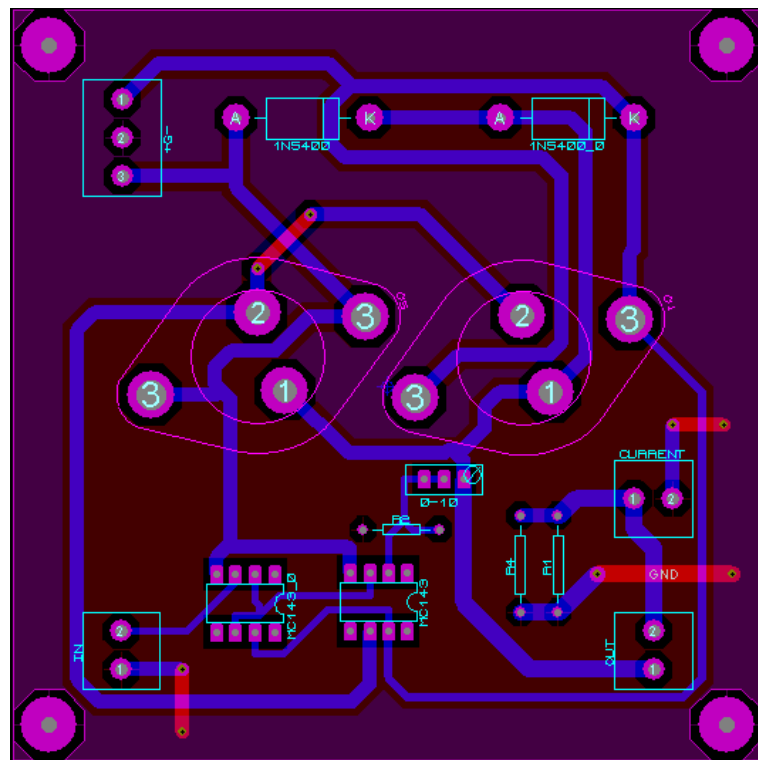


Figura A.2: Diagrama del PCB diseñado en el software ARES, las pista azules indican pistas bajo la placa, la pistas rojas indican pistas en la cara superior de la placa

Para hacer experimentos simultáneos se necesitaron dos etapas de potencia idénticas, ambas se colocaron en un chasis metálico de 16,5 X 13,5 X 13 cm, tomando las especificaciones del PCB que se diseñó, para un manejo más sencillo se usaron conectores RCA hembra en entradas, salidas y alimentación. En la figura A.6 se puede observar las salidas;

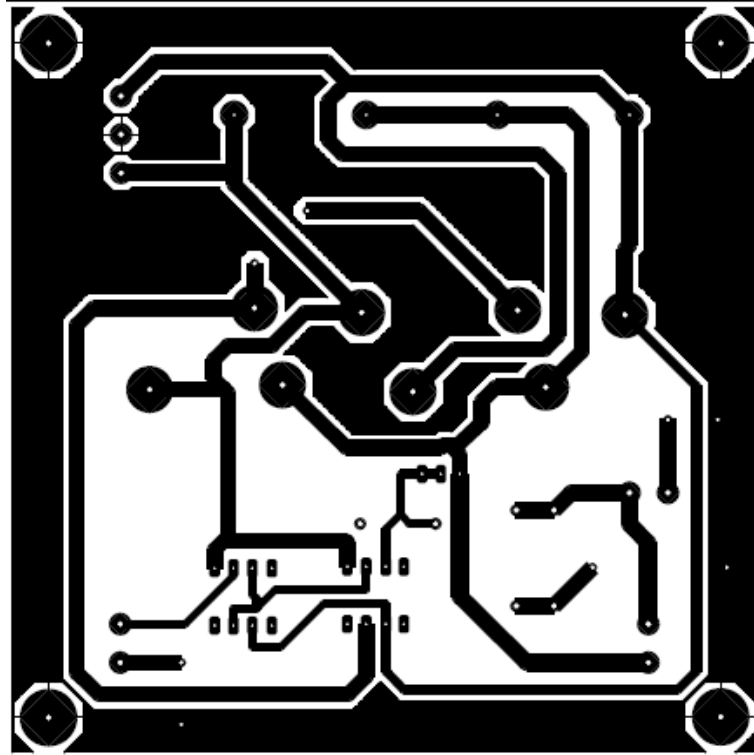


Figura A.3: Pistas de la cara inferior de la placa.

el conector RCA hembra color rojo es la salida de potencia, el conector negro es una señal de voltaje proporcional a la corriente consumida por el motor.

En la vista los costados (Figura A.7) de la etapa de potencia se puede observar los transistores acoplados a su disipador de calor.

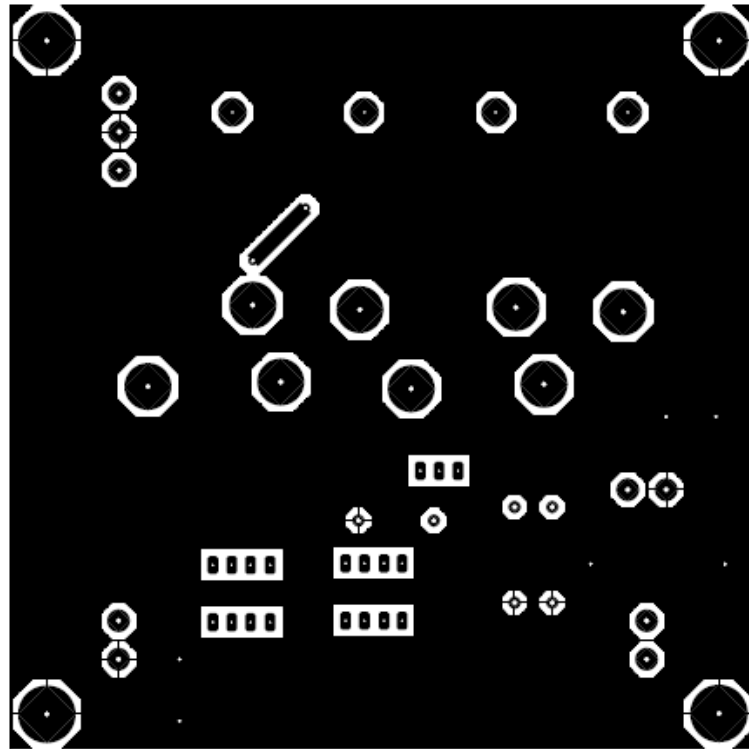


Figura A.4: Pistas de la cara superior de la placa.

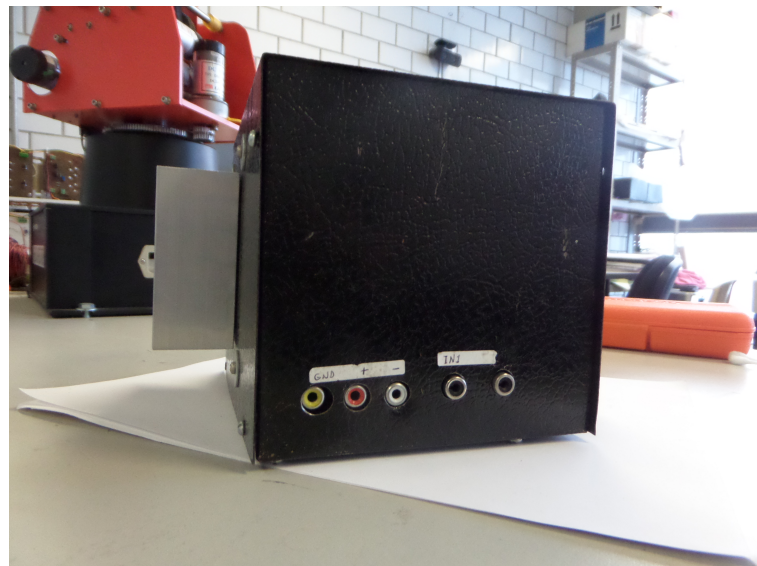


Figura A.5: Entrada de las señales de voltaje.



Figura A.6: Salidas de la señal de potencia y de corriente.

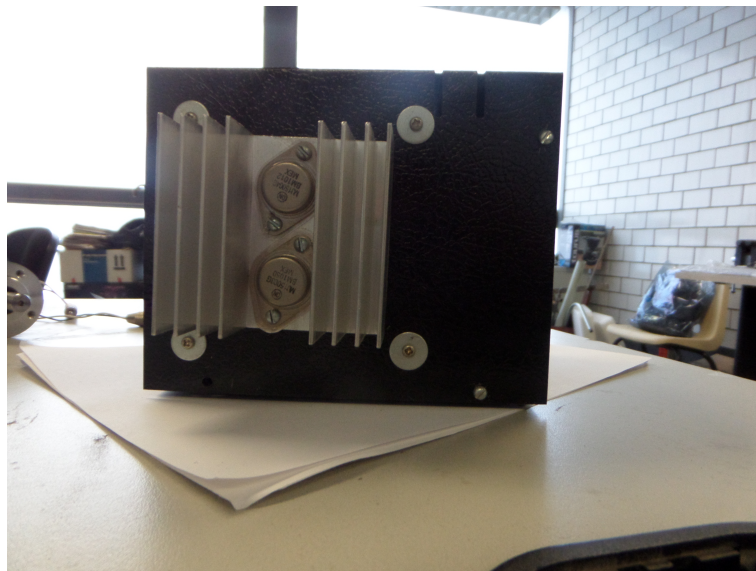


Figura A.7: Vista lateral de la etapa de potencia.

Apéndice B

Tarjeta de adquisición de datos Q8-USB

Una tarjeta de adquisición de datos es un dispositivo electrónico que permite a una computadora comunicarse con el mundo exterior a través de sus puertos. La tarjeta de adquisición de datos empleada es una Q8-USB de la compañía QUANSER B.1 .



Figura B.1: Fotografía de la Q8-USB.

B.1. características

La tarjeta Q8-USB cuenta con ocho entradas analógicas que soportan un voltaje desde -10 V hasta $+10\text{ V}$ y una corriente $\pm 2\ \mu\text{A}$, también cuenta con ocho salidas analógica que pueden entregar voltajes de -10 V hasta $+10\text{ V}$, y una corriente de 20 mA todas las terminales analógicas requieren conectores tipo RCA como se muestra en la Figura B.2.

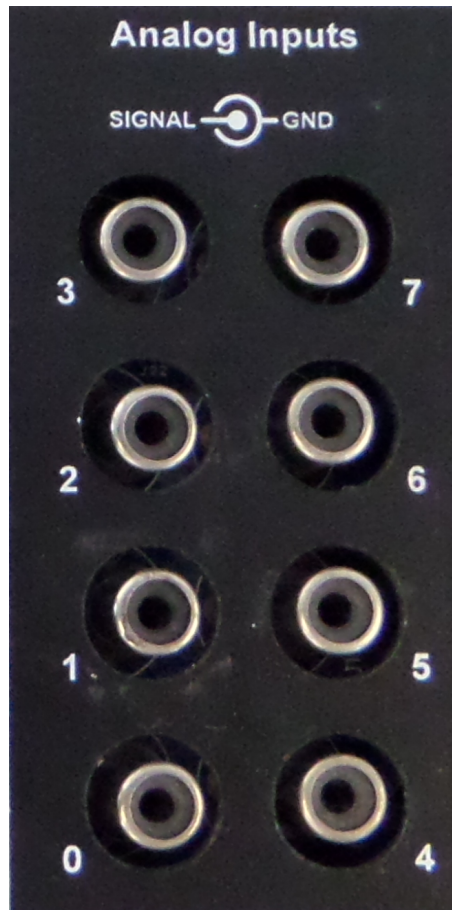


Figura B.2: Acercamiento a las entradas analógicas.

La tarjeta Q8-USB cuenta con ocho entradas digitales y ocho salidas digitales que se pueden configurar como señales de control PWM con niveles de 0 V (bajo) y 5 V (alto). Estas señales requieren conectores de cable plano de dieciséis pines.



Figura B.3: Acercamiento a las entradas y salidas digitales.

Un elemento que facilita la construcción de sistemas de control es que la Q8-USB cuenta con ocho entradas de encoder con 5 V de alimentación y un consumo máximo de 100 mA de corriente con un conector DIN5, conectado de la forma en que se especifica en la misma tarjeta (ver Figura B.4).

Por otro, lado la tarjeta Q8-USB cuenta con un puerto de control donde se puede extraer

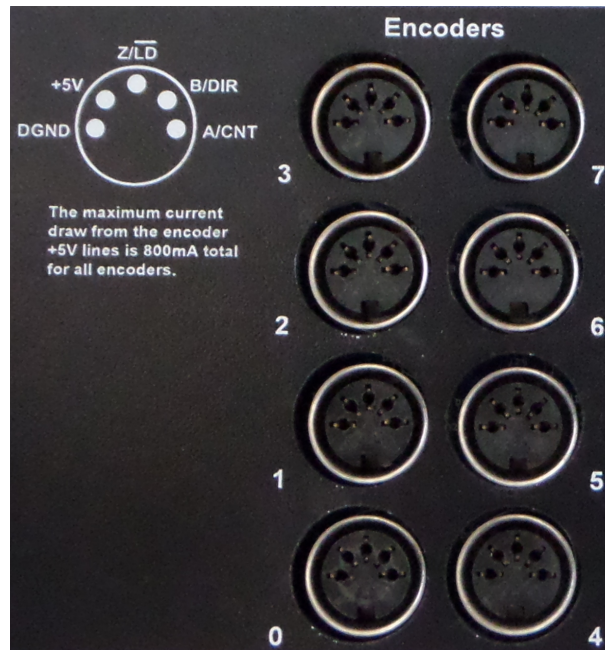


Figura B.4: Entradas de encoder, a la izquierda se observa la conexión de cada pin y las características que deben cumplir los encoders

un voltaje fijo de 5 V, una señal *watchdog* y una señal de interrupción externa mediante un conector de cable plano de diez pines. Al igual que con los encoders, el diagrama de conexión de cada uno de estos pines se encuentran impresos en la misma tarjeta como se puede observa en la figura B.5.

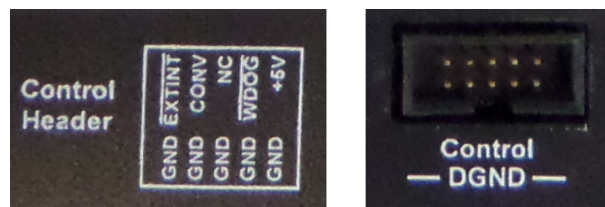



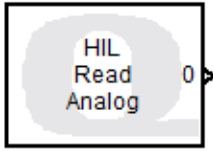
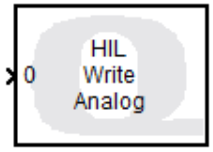
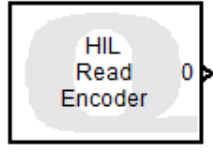
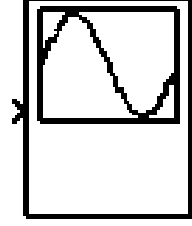
Figura B.5: Puerto de control digital.

La tarjeta Q8-USB cuenta con un fácil acceso a la tierra analógica y a la tierra digital, para poder referenciarse de una manera sencilla a circuitos externos.

B.2. Programa

La tarjeta Q8-USB es compatible con los principales programas de desarrollo y los tres principales sistemas operativos (Windows, Mac y Linux), con lo que se tiene un amplio margen de trabajo.

Por su versatilidad se decidió trabajar en el programa MATLAB. Una vez instalado el programa incluido con la tarjeta, se cargan a MATLAB bloques y funciones especiales para la tarjeta; lectura analógica, escritura analógica, leer encoder, escritura digital, lectura digital, salida PWM, etcétera. En el cuadro B.1 se enlistan los bloques QUARC Target utilizados en esta tesis.

Bloque	Descripción
 <p>HIL Initialize HIL-1 (q8-0)</p>	<p>Este bloque asocia el modelo con una tarjeta HIL específica. El nombre es especificado en el parámetro nombre, a partir de éste bloque se pueden modificar todas las entradas y de la tarjeta especificada con sus respectivas limitaciones</p>
 <p>HIL Read Analog (HIL-1)</p>	<p>Lee una señal analógica de un puerto de entrada analógico especificado, se puede limitar el voltaje de saturación, sin sobrepasar los $\pm 10 V$; que son los límites soportados por los puertos de entrada analógicos.</p>
 <p>HIL Write Analog (HIL-1)</p>	<p>Escribe una señal analógica en un puerto de salida analógico especificado, los límites de voltaje son $\pm 10 V$.</p>
 <p>HIL Read Encoder (HIL-1)</p>	<p>Lee una señal de encoder en un puerto de encoder especificado, se puede multiplicar el número de cuentas leídas en múltiplos de 2, aunque no todas las tarjetas compatibles soportan esta característica.</p>
 <p>Time Figure</p>	<p>Traza su entrada en una gráfica Y contra el tiempo. Se pueden modificar los parámetros para graficar el tiempo que se desee. Una vez terminada la simulación o experimento la gráfica se puede exportar fácilmente a cualquier formato de imagen compatible con MATLAB.</p>

Cuadro B.1: Bloques QUARC Target

Apéndice C

Motores de transmisión armónica

Un motor de transmisión armónica consiste en una caja compacta de engranes que entregan un alto torque, nulo huelgo y elevados niveles de fricción.

Los motores de transmisión armónica utilizados en ésta tesis son de la marca *Harmonic-Drive* tipo RH-14D6002 con características idénticas, cuya única diferencia entre ambos motores es el sensor acoplado.

La alimentación del motor es por medio de dos conectores, uno rojo y uno blanco, siendo el blanco la polaridad positiva y el rojo la negativa.

C.1. Características del actuador

Los parámetros de los motores extraídos de la hoja de datos se muestran en el cuadro C.1.

C.1.1. Dimensiones

Las dimensiones del motor fueron extraídas de la hoja de datos (Drive n.d.). Los valores están expresados en milímetros

Las dimensiones se utilizaron para hacer una base para los motores, la cual mantiene los motores en una posición estable, la base esta hecha de acrílico, con soportes metálicos, cuenta con espacio suficiente para colocar la etapa de potencia y la tarjeta de adquisición de datos (Figura C.2).

C.1.2. Características del tacómetro

El tacómetro entrega una señal de voltaje proporcional a la velocidad del motor por medio de dos terminales una blanco que es la polaridad positiva y una negro que es la polaridad

Parámetro	Valor
Potencia nominal de salida	20,3 <i>W</i>
Voltaje nominal	24 <i>V</i>
Corriente nominal	1,8 <i>A</i>
Torque nominal de salida	3,2 <i>Nm</i>
Velocidad de salida nominal	60 <i>rpm</i>
Máximo torque de paro continuo	5,4 <i>Nm</i>
Corriente pico	5,4 <i>A</i>
Máximo torque de salida	14 <i>Nm</i>
Máxima velocidad de salida	100 <i>rpm</i>
Constante de torque	2,92 <i>Nm/A</i>
Constante de voltaje	0,30 <i>V/rpm</i>
Inercia en el eje de salida	21,6 <i>kgm²x10⁻³</i>
Constante de tiempo mecánica	7 <i>ms</i>
Gradiente torque-velocidad	0,32 <i>Nm/rpm</i>
Constante de amortiguamiento viscoso	0,035 <i>Nm/rpm</i>
Tasa de potencia nominal	0,51 <i>kW/s</i>
Constante de tiempo térmica	11 <i>min</i>
Resistencia térmica	2,8 <i>°C/W</i>
Relación de transmisión	1 : 50
Máxima carga radial	392 <i>N</i>
Máxima carga axial	392 <i>N</i>
Salida nominal del motor	30 <i>W</i>
Velocidad nominal del motor	3000 <i>rpm</i>
Resistencia de armadura	2,7 Ω
Inductancia de armadura	1,1 <i>mH</i>
Constante de tiempo eléctrica	0,41 <i>ms</i>
Corriente de arranque	0,42 <i>A</i>
Corriente de funcionamiento sin carga	0,89 <i>A</i>
Exactitud del actuador	2,0 <i>arcmin</i>
Repetibilidad del actuador	± 60 <i>arcseg</i>

Cuadro C.1: Parámetros del motor RH-14D6002

negativa, los cables negro y blanco son para proporcionar energía eléctrica al motor, se usaron conectores RCA para cada par de cables (Figura C.3).



Figura C.3: Motor con tacómetro

En el Cuadro C.2 se enlistan los parámetros del tacómetro y en la Figura C.4 se muestran las dimensiones del motor con el tacómetro acoplado.

Parámetro	Valor
Resolución	$3 V \pm 10 \%/1000 \text{ rpm}$
Rizo (RMS)	$1 \% (200 \text{ } 5000 \text{ rpm})$
Linealidad	$3 \% (200 \text{ } 5000 \text{ rpm})$
Desviación de dierección	$1 \% (200 \text{ } 5000 \text{ rpm})$
Velocidad de salida nominal	60 rpm
Coefficiente de temperatura	$< 0,02 \%/^{\circ}C$
Momento de inercia	$1,2x \times 10^{-6}$
Resistencia de armadura	$45 \Omega \pm 10 \% (20^{\circ}C)$
Inductancia de armadura	$7 \text{ mH} \pm 20 \%$
Máxima velocidad de rotación	5000 rpm
Torque de fricción	$< 4x \times 10^{-3} \text{ Nm}$
Mínima resistencia de carga	$10 \text{ k}\Omega$
Resistencia de aislamiento	$100 \text{ M}\Omega(\text{DC } 500 \text{ V megaohmetro})$
Voltaje de ruptura	$\text{AC } 500 \text{ V}/1 \text{ minuto}$
Peso	$0,08 \text{ kg}$
Peso del motor con tacómetro	$0,78 \text{ kg}$

Cuadro C.2: Parámetros del tacómetro acoplado al motor RH-14D6002

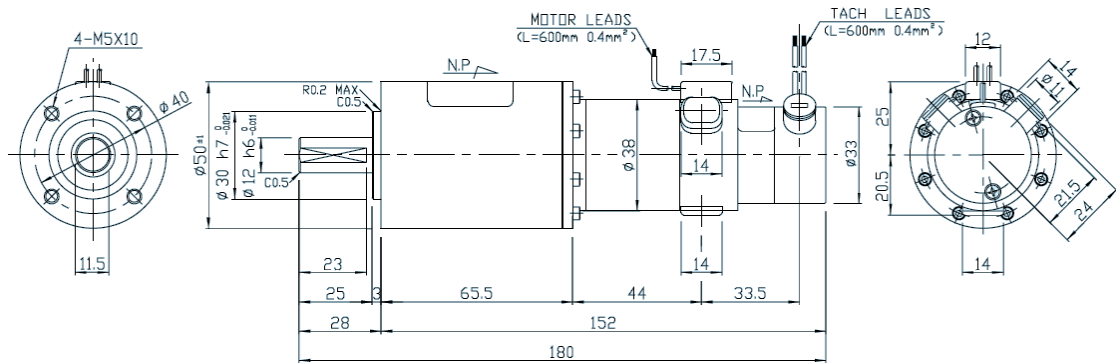


Figura C.4: Dimensiones del motor con el tacómetro acoplado

C.1.3. Características del encoder

El encoder es de tipo incremental Line Drive, entrega dos señales cuadradas A y B desfasadas, y una señal z de referencia, debe se alimentado con 5 V. Las señales de salida y la alimentación del encoder se colocaron en un conector tipo DIN5, la alimentación del motor se lleva a cabo por un par de cables, uno blanco y otro rojo donde el blanco es polaridad positiva y el rojo polaridad negativa, se uso un conector RCA macho para la energía eléctrica del motor(Figura C.5). El Cuadro C.3 muestra los valores de los parámetros del encoder y la Figura C.6 muestra las respectivas dimensiones.



Figura C.5: Motor con encoder.

Parámetro	Valor
Cicuito de salida	Line Driver AL BL
Fuente de alimentación	+5 VDC $\pm 5\%$ +7 +12.6 VDC 170 mA max
Voltaje V_{OL} , V_{OH}	0,5 V max, 2,5 V min
Máxima respuesta en frecuencia	125 kHz
Resolución	1000 P/rev
Señales de salida	A, \bar{A} , B, \bar{B} , Z, \bar{Z}
Máxima corriente I_{OL}	20 A max
Momento de inercia	3×10^{-8} kgm ² max

Cuadro C.3: Parámetros del encoder acoplado al motor RH-14D6002

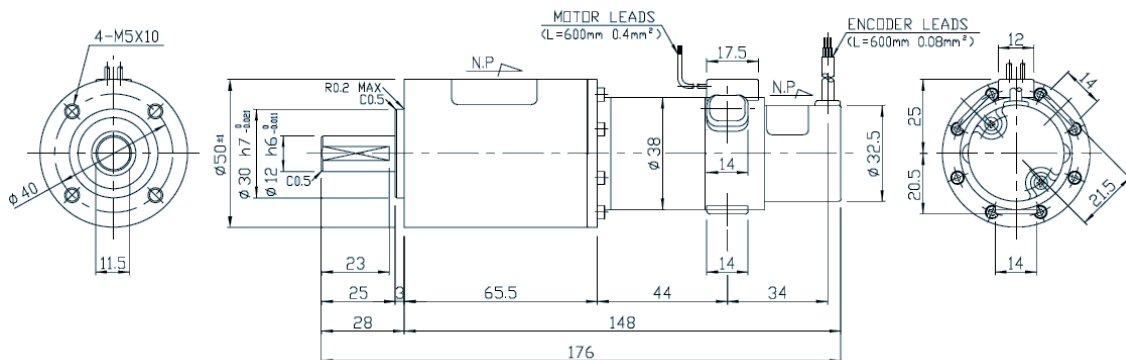


Figura C.6: Dimensiones del motor con el encoder acoplado

Bibliografía

- Al-Bender, F., V. Lampaert y J. Swevers.** 2005. The generalized maxwell-slip model: A novel model for friction simulation and compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50. 1883–1887.
- Armstrong, B.** 1958. *Control of Machines with Friction*. Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- Armstrong, B., P. Dupont y C. C. de Wit.** 1994. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* 30(7). 1083–1138.
- Barabanov, N. y R. Ortega.** 2000. Necessary and sufficient conditions for passivity of the lugre friction model. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45. 830–832.
- Braun, O. M. y Y. S. Kivshar.** 1991. Nonlinear dynamics of the frenkel-kontorova model with impurities. *Physical Review B* 43. 1060–1073.
- Canudas de Wit, C. y P. Lischinsky.** 1997. Adaptive friction compensation with partially and known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 11. 65–80.
- Canudas de Wit, C., H. Olsson, K. J. Åström y P. Lischinsky.** 1995. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(3). 419–425.
- Dahl, P. R.** 1968. *A solid friction model*. Traineeship Report No. A041920. The Aerospace Corporation. LA, California.
- Dahl, P. R.** 1977. *Measurement of solid friction parameters of ball bearing*. Traineeship Report A042599. The Aerospace Corporation. LA, California.
- Drive, H.** n.d.. *DC Servo Systems RH Mini Series*. Tokyo, Japan.
- Geffen, V.** 2009. *A study of friction models and friction compensation*. Traineeship Report 118. Technische Universiteit Eindhoven. Eindhoven.
- Kelly, R., J. Llamas y R. Campa.** 2000. A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 49(4). 857–861.

- Lampaert, V., J. Swevers y F. Al-Bender.** 2002. Modification of the leuven integrated friction model structure. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(4). 683–687.
- Martínez, J. C., L. Álvarez y D. Noriega.** 2015. Model-based dynamic friction compensation in robot actuators (aceptado para ser publicado). *International Journal of Robotics and Automation*.
- Young, H. D. y R. A. Freedman.** 2013. *Física Universitaria, Décimo tercera edición*. México: Pearson.