

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS Y DE
TELECOMUNICACIONES

**Evaluación de algoritmos de interpolación polinomiales, adaptivos y basados en
redes neuronales para la superresolución de imágenes**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
LICENCIADOS EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS Y DE
TELECOMUNICACIONES

PRESENTAN

**VALDEMAR GONZÁLEZ RAMIREZ
MANUEL ALBERTO RUIZ RIVAS**

DIRECTOR

DR. DANIEL TAPIA SÁNCHEZ

Ciudad de México, junio de 2026.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Resumen

El presente trabajo recepcional aborda el tema de la eficiencia de los algoritmos de superresolución en imágenes. El propósito es implementar métodos polinomiales, adaptivos y basados en redes neuronales para evaluar su eficiencia. En este caso se considera específicamente el problema de la superresolución de una sola imagen estática el cual es común en aplicaciones limitadas por la resolución del dispositivo de captura y/o por la distancia desde donde es posible capturar la imagen y/o por la capacidad del canal de comunicación por donde debe transmitirse. En lo que respecta a los algoritmos de superresolución, se consideran los métodos polinomiales debido a su baja complejidad, así como la aplicación de métodos adaptivos y el uso de una red neuronal para mejorar su eficiencia. La evaluación de los algoritmos se realiza a través de la PSNR y el SSIM como métricas de calidad. Este trabajo se desarrolla como parte de un proyecto dentro de la convocatoria de investigación del Colegio de Ciencia y Tecnología de la UACM.

DEDICATORIA

Agradecemos a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por el apoyo a este trabajo a través de la Convocatoria de Proyectos de Investigación.

CONTENIDO

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Marco Metodológico	11
1.1 Planteamiento del problema.....	12
1.2 Solución propuesta.....	12
1.3 Objetivo general	13
1.4 Objetivos específicos	13
1.5 Justificación.....	14
1.6 Metodología.....	15
1.7 Organización del documento.....	17
2. Marco Teórico	18
2.1 Resolución espacial de una imagen.....	19
2.2 Degradación de la resolución espacial.....	19
2.3 Superresolución de una imagen.....	21
2.4. Interpolación de imágenes.	22
2.5 El problema de la interpolación.	23
2.6 Técnicas de interpolación polinomial.....	26
2.6.1 Técnica de Interpolación “Bilineal”.....	26
2.6.2 Técnica de interpolación Bicubica	27
2.6.3 Técnica de interpolación O-MOMS.	27
2.7 Técnicas de interpolación adaptivas	29
2.7.1 Interpolación con distancia deformada.	29
2.7.2 Interpolación ponderada.....	30
2.8 Interpolación adaptiva usando redes neuronales	32
2.8.1 Fundamentos de las redes neuronales.....	32
2.8.2 Conceptos generales de las redes neuronales.	34
2.9 Algoritmo de entrenamiento de la red neuronal.....	36
2.10 Interpolación polinomial usando la red neuronal	38
2.10.1 Fase de entrenamiento.....	38

2.10.2 Fase de pruebas.....	39
2.11 Métricas de calidad.	40
2.11.1 La relación señal a ruido pico.....	40
2.11.2 El índice de Similitud Estructural	41
3.1 Procedimiento general.	44
3.2 Implementación del método de distancia deformada.	45
3.3 Implementación del método de interpolación ponderada.	54
4.1 Resultados esperados en la evaluación de los algoritmos de superresolución.	62
4.2 Imágenes de prueba.	62
4.3 Resultados	65
4.4 Conclusiones.....	77
4.5 Trabajo a futuro	78
REFERENCIAS.....	79

ÍNDICE DE FIGURAS

Núm. de Figura	Descripción	Página
1.1	Metodología	15
2.1	Resolución espacial de una imagen.....	19
2.2	Sensores de imagen y almacenamiento de la imagen.....	20
2.3	Superresolución de una imagen.....	21
2.4	Interpolación de una imagen.....	22
2.5	Distancia de interpolación a partir de píxeles conocidos.....	23
2.6	Distancia de interpolación a partir de píxeles conocidos.....	24
2.7	Imagen de baja resolución LR, Matriz de coeficientes $c(x)$ e imagen equivalente de alta resolución HR.....	25
2.8	Forma general de una red neuronal	32
2.9	Neurona del cerebro humano y neurona de una red neuronal artificial	33
2.10	Arquitectura de la red neuronal	35
3.1	Diagramas de flujo con el procedimiento de interpolación y evaluación de los algoritmos.....	45
3.2	Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para los planos $\hat{G}$ y $\hat{B}$ de una imagen a color parte 1	46
3.3	Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para los planos $\hat{G}$ y $\hat{B}$ de una imagen a color parte 2	47
3.4	Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para una imagen en escala de grises o el plano $\hat{R}$ de una imagen a color	48
3.5	Diagramas de flujo con el procedimiento para calcular el MSE y la PSNR	49
3.6	Diagramas de flujo con el procedimiento para calcular el SSIM	50
3.7	Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación bilineal	51
3.8	Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación bicúbica	52
3.9	Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación O-MOMS bicúbica	53

3.10	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	54
3.11	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	55
3.12	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	56
3.13	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	57
3.14	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación con distancia variable para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	58
3.15	Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación con distancia variable para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color	59
3.16	Diagrama de flujo con el procedimiento para el entrenamiento de la red neuronal	60
4.1	Imagen de referencia Fotogrametría_1.jpg de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles	63
4.2	Imagen de referencia Fotogrametría_2.jpg de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles	63
4.3	Imagen de referencia Torax.jpg de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles	64
4.4	Imagen de referencia Tomografía.jpg de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles	64
4.5	Imagen de referencia Endoscopía.jpg de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles	65
4.6	Resultados de interpolación sobre imagen Fotogrametría_1.jpg ...	66
4.7	Resultados de interpolación sobre imagen Fotogrametría_2.jpg ...	67
4.8	Resultados de interpolación sobre imagen Torax.jpg	68
4.9	Resultados de interpolación sobre imagen Tomografía.jpg	69
4.10	Resultados de interpolación sobre imagen Endoscopía.jpg	70

ÍNDICE DE TABLAS

Núm. de Tabla	Descripción	Pág .
4.1	Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 1.....	72
4.2	Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 2.....	73
4.3	Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 3.....	74
4.4	Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 4.....	75
4.5	Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 5.....	76

Introducción

El procesamiento de señales es una función primordial en todos los sistemas electrónicos y de telecomunicaciones modernos. En particular, el tratamiento de señales bidimensionales adquirió especial relevancia con el desarrollo de las comunicaciones multimedia, en donde las imágenes y video digitales representan el principal contenido de información que se transmite a través de los diferentes canales de comunicación. Esto ha impulsado a su vez nuevos avances en el campo de la electrónica, de tal forma que actualmente se puede encontrar en el mercado una amplia variedad de dispositivos multimedia con la capacidad de capturar, transmitir y mostrar contenidos de imágenes y video de muy alta calidad.

Cuando se habla de la calidad de una imagen se hace referencia a todo un conjunto de características, dentro de los cuales, su resolución espacial, definida como la cantidad de píxeles que componen la imagen, es una de las más importantes. En el pasado, la alta resolución era exclusiva de pantallas de grandes dimensiones, sin embargo, actualmente se puede disfrutar de la más alta capacidad de resolución en todo tipo de pantallas, incluyendo las interfaces gráficas integradas en una amplia gama de dispositivos portátiles. Desde luego que la alta calidad de la imagen debe lograrse independientemente del tamaño de la pantalla en cuestión. Sin embargo, el trabajo de ingeniería que se encarga del desarrollo de estos productos aún no termina por resolver por completo todos los problemas que limitan la calidad de imagen. Uno de ellos, por ejemplo, es que la miniaturización de los componentes electrónicos obedece a límites físicos que dificultan la disposición de imágenes de alta resolución inmediatamente después de su captura, por lo que en todos los casos se requiere del procesamiento digital de señales para que esto sea posible. Algo parecido ocurre cuando las imágenes son transmitidas a través de algún canal de comunicación, ya que la capacidad de resolución está sujeta a los límites del medio físico utilizado. Por último, también debe considerarse ciertas situaciones en donde, la captura de la imagen debe realizarse a una distancia considerablemente grande desde donde ocurre la

escena de interés como, por ejemplo, en imagenología médica, satelital, teledetección y fotogrametría. De esta forma, dado que no siempre es posible disponer de imágenes de alta calidad, el uso de técnicas de procesamiento digital continúa siendo de gran utilidad para un gran número de aplicaciones. Una de las más importantes es la Superresolución, la cuales combina sofisticados métodos matemáticos y algoritmos computacionales para procesar los rasgos limitados de las imágenes y transformarlos hasta lograr el nivel de percepción deseado.

Existen diversas técnicas de superresolución, algunas de las cuales emplean sofisticados métodos de fusión de datos y de aprendizaje automático, sin embargo, su aplicación requiere de costosos equipos debido su alta complejidad computacional. El trabajo aquí presentado se enfoca al uso de las técnicas más simples de superresolución basadas en el uso de polinomios de interpolación. La razón es que aun cuando existen técnicas más avanzadas, el uso de polinomios ha demostrado gran efectividad con bajo costo computacional. El problema en este caso está relacionado con la manera en la que podría mejorarse la eficiencia de estos algoritmos, y la solución propuesta tiene que ver con la evaluación de algunos métodos adaptivos para lograrlo. En miras de conservar un bajo costo computacional, se propone también evaluar el uso de una red neuronal de baja complejidad. Los algoritmos se evalúan sobre algunas imágenes típicas donde se aplican este tipo de técnicas de superresolución, como, por ejemplo, imágenes médicas y fotogrametría. Para ello se hace uso de la relación pico señal a ruido o PSNR y del índice de similitud estructural o SSIM.

Capítulo 1

1. Marco Metodológico

El primer capítulo describe los elementos metodológicos a partir de los cuales se llevó a cabo el planteamiento del trabajo recepcional. En primer lugar, se presenta el planteamiento del problema y la propuesta de solución. Posteriormente se presentan los objetivos, la metodología y herramientas utilizadas. Por último, se describe en lo general la estructura y contenido del resto del documento.

1.1 Planteamiento del problema

El problema abordado en este trabajo es el del mejoramiento en la eficiencia de los métodos de superresolución polinomiales. Este problema implica responder varias preguntas: ¿Cuál es la eficiencia máxima que puede lograrse mediante los métodos clásicos de interpolación polinomial? ¿Es posible mejorar la eficiencia de estos métodos aplicando técnicas adaptivas? ¿Es posible mejorar la eficiencia de los métodos aplicando una red neuronal simple? ¿Tiene algún impacto sobre la eficiencia el aplicar los métodos fila por fila o columna por columna? Estas son las preguntas que se deben responder al final del desarrollo del trabajo.

1.2 Solución propuesta

Para responder las preguntas planteadas se propone seleccionar tres de los métodos clásicos de interpolación polinomial: bilineal, bicúbica y O-MOMS bicúbica. Se propone en primer lugar implementar como referencia los métodos considerando un espacio lineal con distancia de interpolación fija. Se propone utilizar posteriormente una técnica adaptiva de espacio variable con distancia deformada y una técnica con distancia fija, pero con valores de los píxeles ponderados. Se propone implementar un algoritmo adaptivo que permita variar la distancia entre los píxeles hasta encontrar el valor óptimo que resulte en el error mínimo. También, se propone experimentar con una red neuronal simple con el fin de investigar si es posible lograr mejoras significativas en la eficiencia de la interpolación polinomial. Finalmente se propone utilizar el valor pico de la relación señal a ruido y el índice de similitud estructural como métricas de calidad y eficiencia de los algoritmos.

1.3 Objetivo general

Evaluar la eficiencia de algoritmos de superresolución mediante la implementación de métodos de interpolación polinomial adaptivos y basados en redes neuronales para determinar su viabilidad en futuras aplicaciones de imagenología médica y fotogrametría.

1.4 Objetivos específicos

1. Implementar los métodos de interpolación bilineal, bicúbica y O-MOMS bicúbica considerando un espacio variable con distancia deformada entre píxeles.
2. Implementar los métodos de interpolación bilineal, bicúbica y O-MOMS bicúbica con distancia fija y valores ponderados de píxeles.
3. Implementar los métodos de interpolación bilineal, bicúbica y O-MOMS bicúbica utilizando una red neuronal para minimizar el error de adaptación.
4. Evaluar y contrastar entre sí la eficiencia de los métodos implementados aplicando métricas de calidad.

1.5 Justificación

El desarrollo del trabajo recepcional se justifica por ser parte de los productos comprometidos en un proyecto de investigación aprobado en la convocatoria de la Comisión de Investigación del Colegio de Ciencia y Tecnología de la UACM. La razón de enfocar el tema a algoritmos de baja complejidad tiene que ver con la viabilidad del proyecto de investigación. Originalmente se había planeado la implementación de métodos supervisados y no supervisados, sin embargo, surgieron limitantes durante la gestión financiera ya que por políticas de compra institucionales el monto aprobado no fue suficiente para adquirir el equipo de cómputo de alto rendimiento que se necesitaba para ejecutar los métodos de alta complejidad. Así que, para no retrasar aún más el desarrollo del proyecto, se optó por cambiar el enfoque hacia métodos clásicos de superresolución y analizar la forma de mejorar su eficiencia mediante adaptación y redes neuronales tradicionales. No fue posible considerar redes neuronales más sofisticadas por las mismas razones de viabilidad. Esto no significa que el tema no sea relevante. Por el contrario, los métodos basados en interpolación polinomial continúan vigentes en el campo de la superresolución gracias a su baja complejidad, la cual es una propiedad muy importante que los convierte en la mejor alternativa en diversas aplicaciones de la superresolución a pesar de los avances en la tecnología electrónica para los cuales pareciera que el costo computacional no es relevante. En el mundo real existe una gran cantidad de equipos de adquisición de imágenes en distintas áreas que pertenecen al rango de gama baja o media que no han sido sustituidos por diversas razones, por lo que se mantienen operando y entregando imágenes que requieren mejorar su calidad para que sean útiles para los usuarios. Si se puede lograr la calidad de resolución mediante técnicas de baja complejidad, sería posible implementar estos algoritmos en cualquier hardware de capacidades limitadas, incluyendo los equipos de generaciones anteriores, pero también las nuevas generaciones de dispositivos portables de computación vestible.

1.6 Metodología

El desarrollo del trabajo se llevará a cabo siguiendo la siguiente metodología:

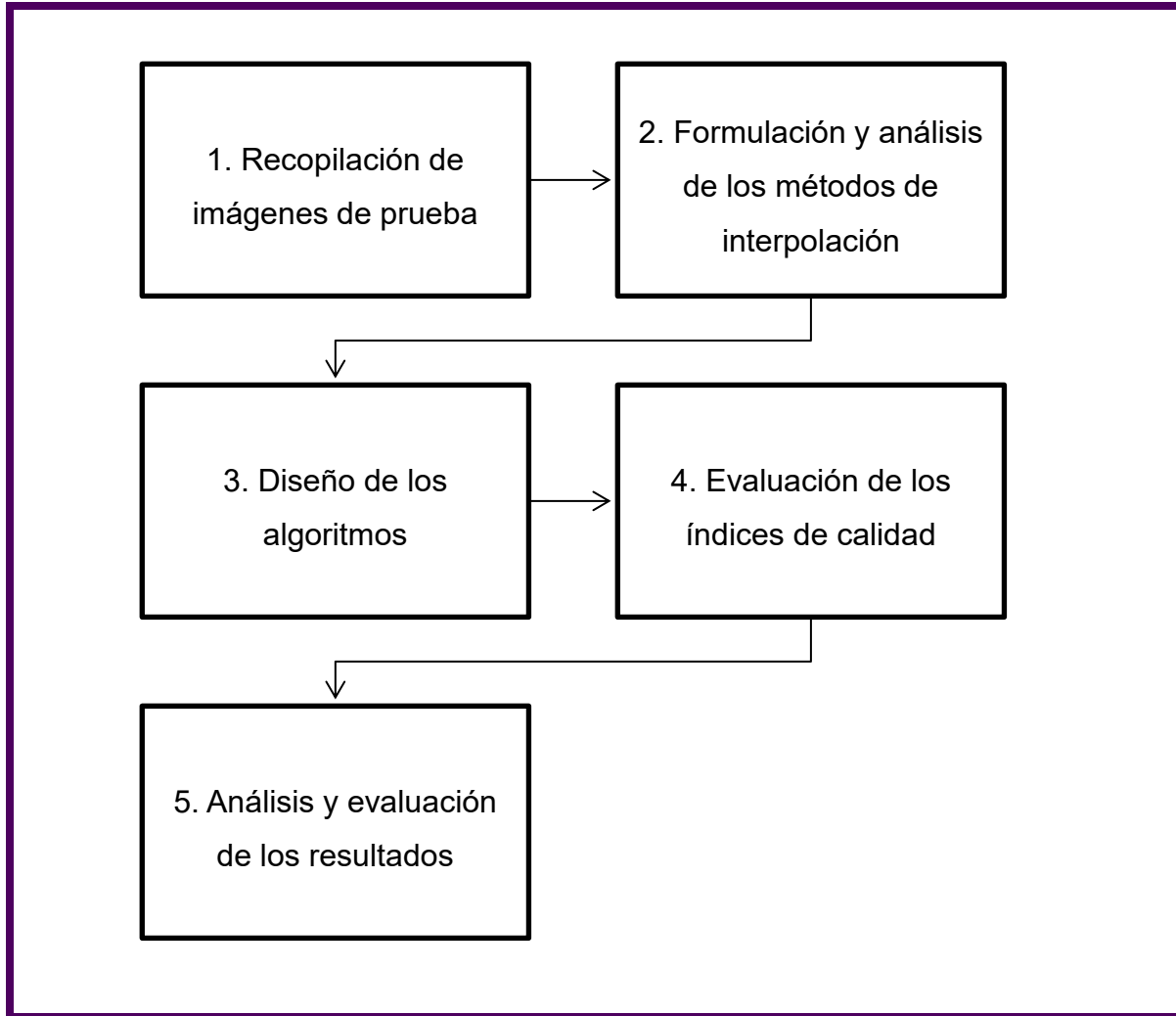


Figura 1.1 Metodología

1. Recopilación de imágenes de prueba: Debido a los objetivos del proyecto de investigación, se buscarán imágenes en el área médica y de fotogrametría.
2. Formulación y análisis de los métodos de interpolación: En esta fase se analizarán los modelos matemáticos de los métodos de superresolución mediante la revisión de las bases teóricas, el estado del arte y técnicas de modelado.

3. Diseño de los algoritmos: Esta etapa representa la de mayor relevancia del trabajo, ya que se desarrollarán todos los algoritmos necesarios para implementar los métodos de interpolación, incluyendo los polinomiales clásicos, los adaptivos y el método basado en redes neuronales. Posteriormente se procederá a programar los códigos, depurarlos y ejecutarlos en un lenguaje de alto nivel.
4. Evaluación de los índices de calidad. Esta etapa comprende la incorporación de los cálculos de índices de calidad (PSNR y SSIM) al final de cada algoritmo para evaluar la eficiencia de los métodos.
5. Análisis y evaluación de los resultados: Finalmente, se procederá a analizar los resultados obtenidos, contrastar la eficiencia de cada método y responder las preguntas planteadas al inicio del trabajo.

1.7 Organización del documento

El trabajo se encuentra dividido en cuatro capítulos. El primer capítulo describe el marco metodológico del trabajo. Como puede observarse, se presenta el planteamiento del problema, la propuesta de solución, los objetivos, la justificación, la metodología a seguir y justo como lo muestra este apartado, se describe la organización de todo el documento del trabajo recepcional.

El segundo capítulo describe el marco teórico de la superresolución y de la interpolación de imágenes. Se describen sus fundamentos matemáticos y se explican los modelos que se implementarán en el siguiente capítulo.

El tercer capítulo describe los algoritmos diseñados para implementar cada método de interpolación descrito en el capítulo 2.

El cuarto capítulo presenta el análisis de los resultados, las conclusiones y la forma en que este trabajo será utilizado en el desarrollo del proyecto de investigación.

Capítulo 2

2. Marco Teórico

El segundo capítulo del trabajo describe los fundamentos teóricos de la superresolución. Se introduce el concepto de la resolución espacial de una imagen y las fuentes que originan su degradación. Se describen los conceptos de superresolución e interpolación, así como el problema y modelo general a partir del cual son aplicadas. Posteriormente se describen los métodos de interpolación polinomial y su formulación, los cuales servirán de base para la implementación descrita en el siguiente capítulo.

2.1 Resolución espacial de una imagen.

En el campo del procesamiento digital, una imagen está formada por una matriz de pequeños elementos llamados píxeles. La resolución espacial de la imagen se determina por la cantidad de píxeles que la forman y se mide en píxeles o puntos por unidad de área, generalmente píxeles o puntos por pulgada [1]. En la Figura 2.1 se ilustra el concepto de la resolución espacial con dos imágenes digitales. La Figura 2.1a muestra una imagen de baja resolución con 10 píxeles por pulgada. Por otra parte, la Figura 2.1b muestra la misma imagen, pero con el doble de resolución, es decir, 20 píxeles por pulgada.

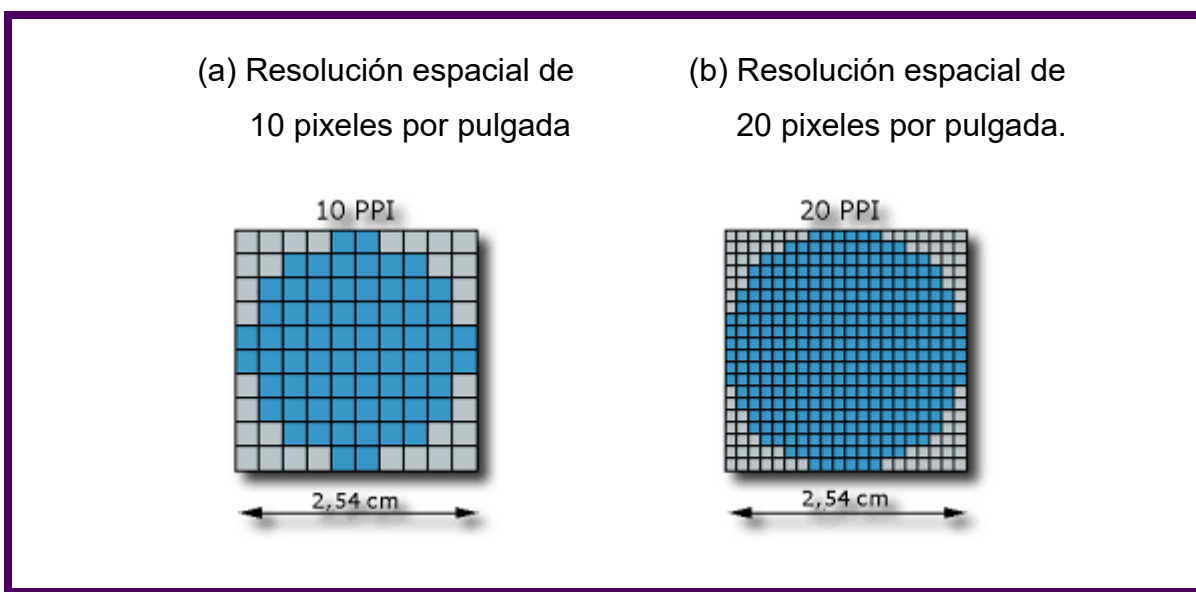


Figura 2.1 Resolución espacial de una imagen.

2.2 Degradación de la resolución espacial.

En la mayoría de los escenarios de aplicación del procesamiento de imágenes, una alta resolución siempre es mejor que una baja resolución. Por una parte, cuando las imágenes son presentadas ante las personas, una mayor resolución facilita el proceso de percepción visual a través del cual el cerebro transforma la información lumínica captada por el ojo humano. Por otra parte, un mayor nivel de

detalle eleva la eficiencia de los algoritmos que deben ser aplicados para mejorar rasgos específicos de la imagen.

Sin embargo, desde el proceso de captura, las imágenes digitales presentan una degradación en su resolución espacial ocasionada principalmente por las limitaciones físicas del hardware. Cada dispositivo está equipado con un arreglo de sensores de imagen con la capacidad de capturar la luz incidente y convertirla en una señal eléctrica representada como una secuencia de valores discretos. La Figura 2.2 muestra una representación de tres sensores de imagen y la organización de estos sobre una malla de $M \times N$, tal como se encuentran organizados dentro del dispositivo de captura. En este caso la resolución de la imagen capturada se ve degradada tanto por la cantidad de celdas en el dispositivo como por el tamaño de cada uno de esos sensores de imagen. Entre más pequeño sea el sensor la resolución será más alta y entre más celdas existan también mejorará significativamente la resolución espacial de la imagen. El problema es que el costo de los sensores imagen se incrementa en la medida que aumenta su capacidad de resolución. Por otro lado, algunas aplicaciones requieren el uso de cámaras muy pequeñas, lo que dificulta también la disponibilidad de sensores de alta resolución debido al espacio físico.

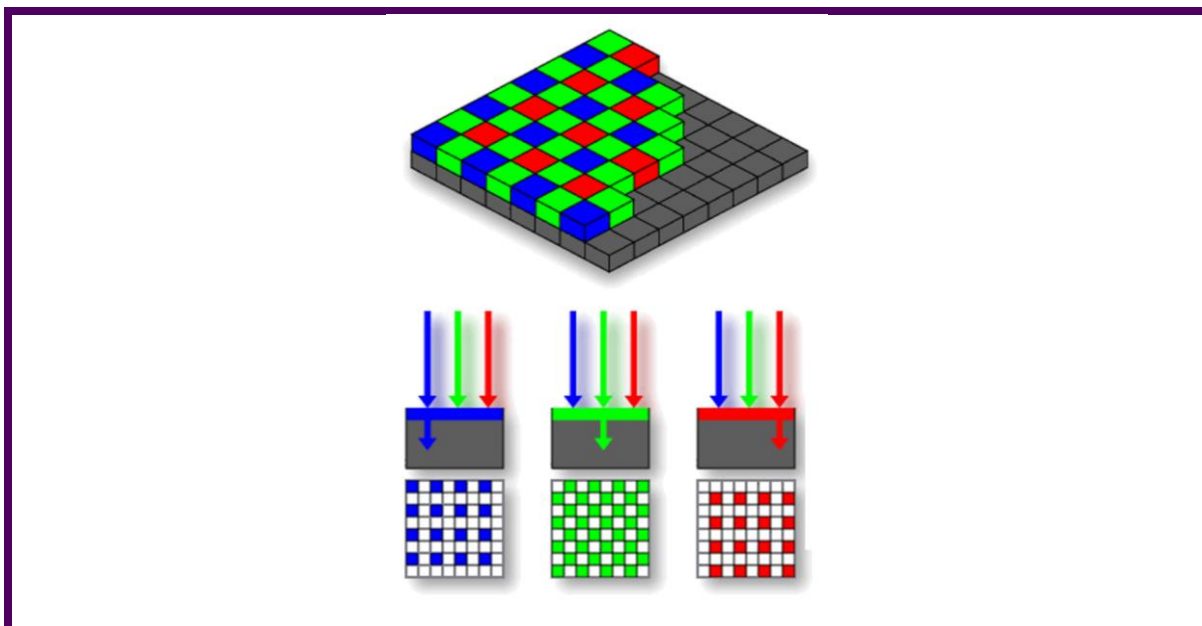


Figura 2.2 Sensores de imagen y almacenamiento de la imagen.

2.3 Superresolución de una imagen.

La mejora en la resolución espacial de imágenes puede lograrse por medio de hardware o mediante algoritmos computacionales. Cada que exista la posibilidad, es preferible utilizar sistemas de captura de alta resolución capaces de lograr imágenes con una alta calidad visual. Sin embargo, el alto costo de estos equipos representa en la mayoría de los casos una limitante difícil de superar, conduciendo a la inviabilidad de las soluciones basadas en hardware. Debido a esto, el problema de la degradación en la resolución de las imágenes ha sido abordado desde una perspectiva computacional mediante técnicas de procesamiento de imágenes y diversas clases de algoritmos. Gracias a esto, es posible mejorar substancialmente la resolución de una imagen a niveles de detalle tan altos que a las técnicas y métodos se les conoce como algoritmos de Superresolución, como se muestra en la Figura 2.3.

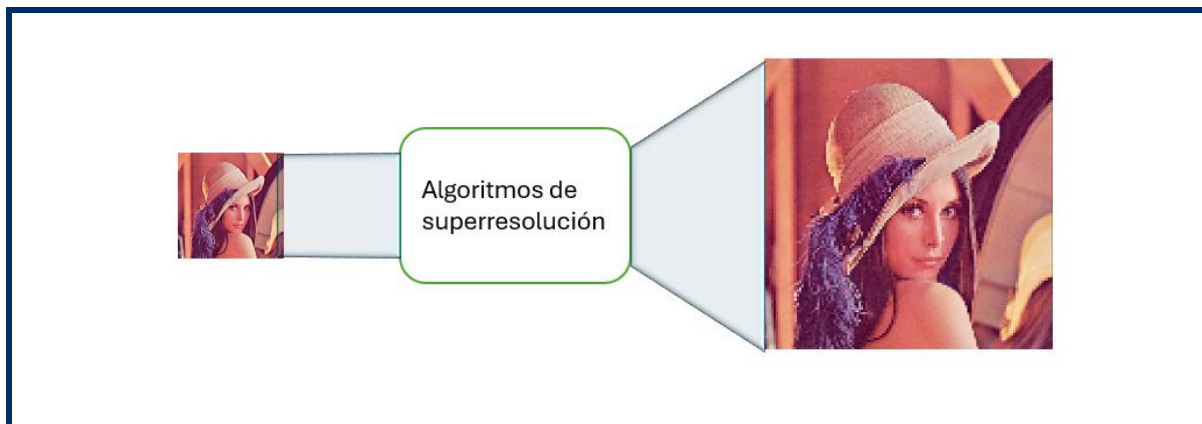


Figura 2.3: Superresolución de una imagen.

2.4. Interpolación de imágenes.

De acuerdo con el portal de Mathworks¹ la interpolación es una técnica matemática utilizada para estimar nuevos puntos de datos dentro del rango de un conjunto de puntos de datos conocido. Esta técnica es de gran utilidad para rellenar datos faltantes, suavizar datos existentes y hacer predicciones, entre otras.

La interpolación es una tarea muy importante en el campo de la superresolución debido a precisamente para aumentar la resolución espacial de una imagen, es necesario estimar el valor de los píxeles faltantes a partir de los valores de los píxeles conocidos de la imagen con baja resolución disponible. Entre mayor sea la resolución espacial requerida mayor será la cantidad de píxeles que se deben estimar. Esto se ilustra en la Figura 2.4. Para mejorar la resolución de la imagen de $M \times N$ píxeles de la Figura 2.4a al doble, será necesario estimar $2M \times 2N$ píxeles cuyo valor es desconocido. Por otra parte, si se desea aumentar la resolución al triple, será necesario estimar $3M \times 3N$ valores de píxeles desconocidos. Esta tarea se logra mediante el proceso de Interpolación.

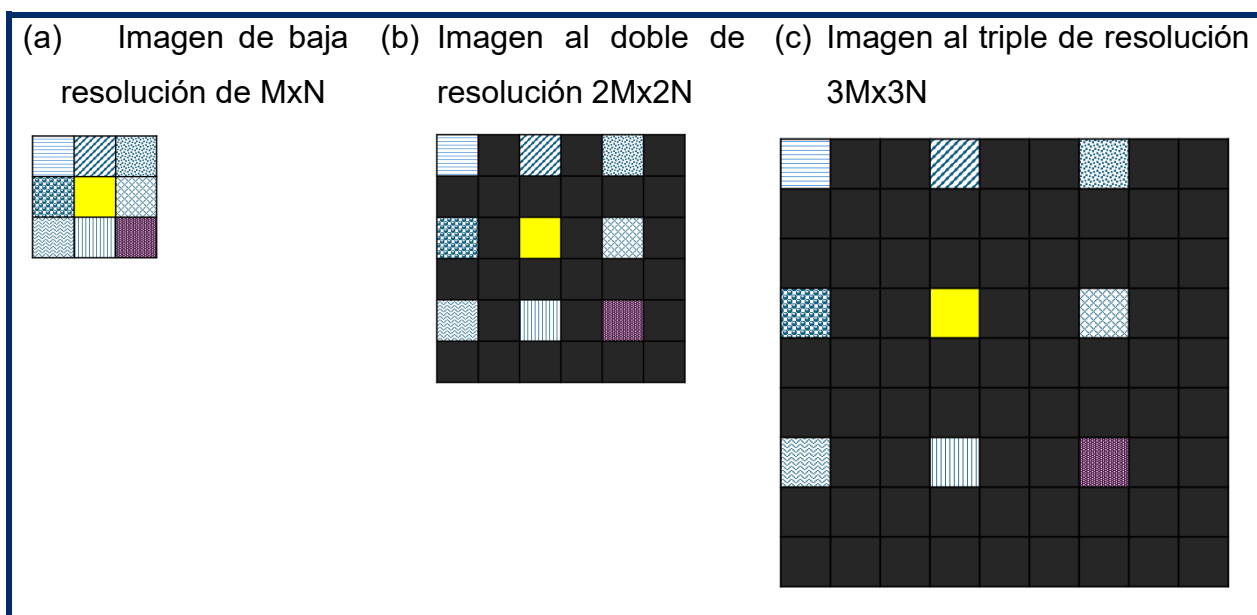


Figura 2.4 Interpolación de una imagen.

¹ <https://la.mathworks.com/help/matlab/interpolation.html>

2.5 El problema de la interpolación.

El problema clásico de la interpolación [1-3], aplicado a la i -ésima fila de una imagen, se ilustra en la Figura 2.3 y consiste en estimar el valor del pixel intermedio en la posición x a una distancia s de la posición x_k , y a una distancia $1 - s$ de la posición x_{k+1} . Asumiendo que todos los pixeles están igualmente espaciados en todas las filas y columnas de la imagen, es posible formular el problema de la interpolación como la estimación de los valores de una función $\hat{f}(x)$ de tal forma que:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(x_k) \beta(x - x_k) \quad (2.1)$$

donde $\beta(x)$ representa una combinación lineal de funciones base a partir de las cuales se realiza la interpolación. También se denomina Kernel de interpolación y su función es seleccionar los pixeles vecinos y su ponderación al momento de interpolar cada pixel desconocido, como se muestra en la Figura 2.5. $c(x)$ es un conjunto de coeficientes dispersos en filas y columnas de orden igual al tamaño de la imagen de superresolución. Es decir, si se desea interpolar una imagen de 256×256 para obtener su equivalente en superresolución de 1024×1024 , entonces $c(x)$ consistirá en este último número de pixeles, los cuales contendrán los 256×256 pixeles de la imagen original se denominan coeficientes de interpolación y se obtienen a partir de los pixeles de la imagen original separados por pixeles de valor cero en la cantidad suficiente para formar la imagen de alta resolución (1024×1024 , en este caso).

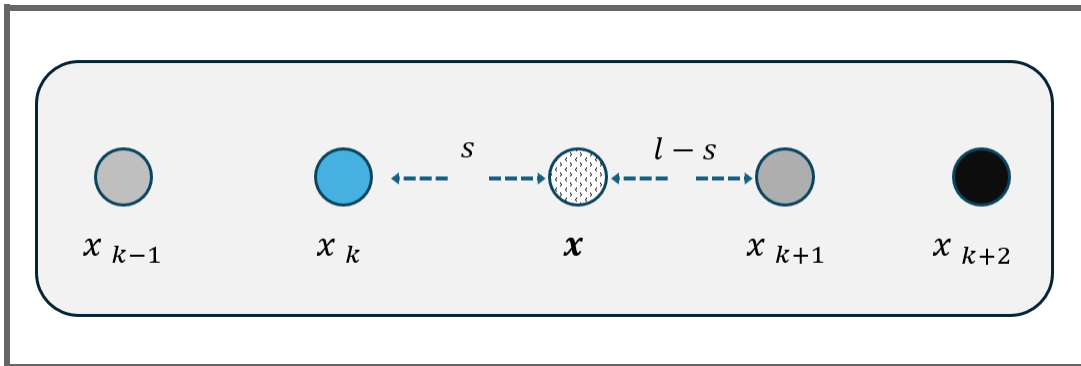


Figura 2 5. Distancia de interpolación a partir de pixeles conocidos.

En la Figura 26 se muestra el proceso para obtener la matriz de coeficientes $c(x)$. En la parte superior, la Figura 2.6a muestra una imagen de baja resolución espacial, la cual consiste en una matriz de números enteros que representan los niveles de intensidad que dan la tonalidad a cada píxel. La figura 2.6b muestra una sección de la imagen con sus valores de píxeles.

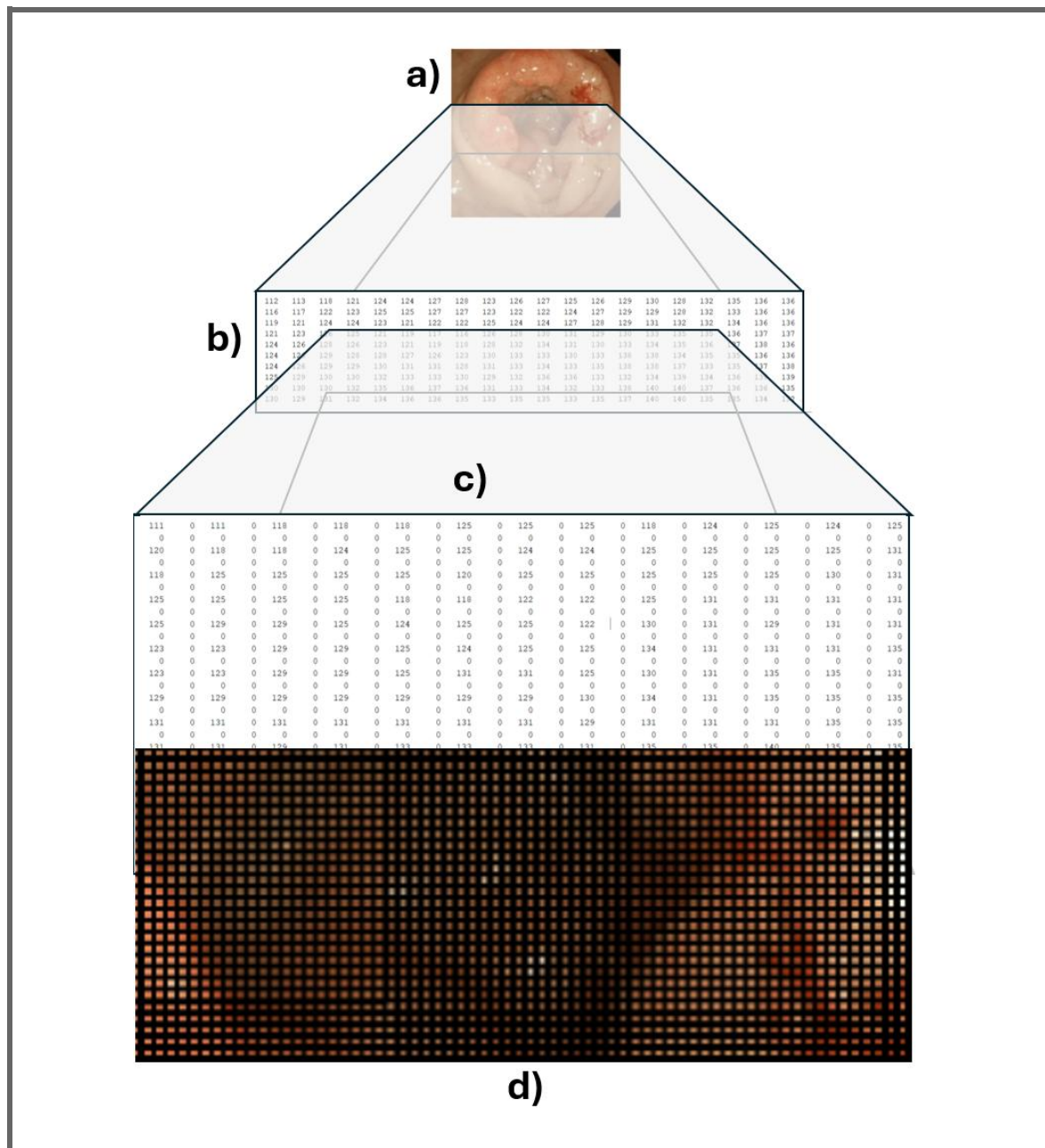


Figura 2 6. Distancia de interpolación a partir de píxeles conocidos.

Los valores de la imagen de baja resolución se mapean a otra matriz intercalando ceros entre ellos con el fin de obtener un molde o rejilla con la dimensión exacta que se desea obtener para la imagen de alta resolución. Las figuras 2.6c y 2.6d muestran una porción de esta imagen denominada matriz de coeficientes de interpolación dentro del proceso de superresolución. Los algoritmos de interpolación que se describen en este trabajo se aplican precisamente sobre esta matriz, como se muestra en la figura 2.7.

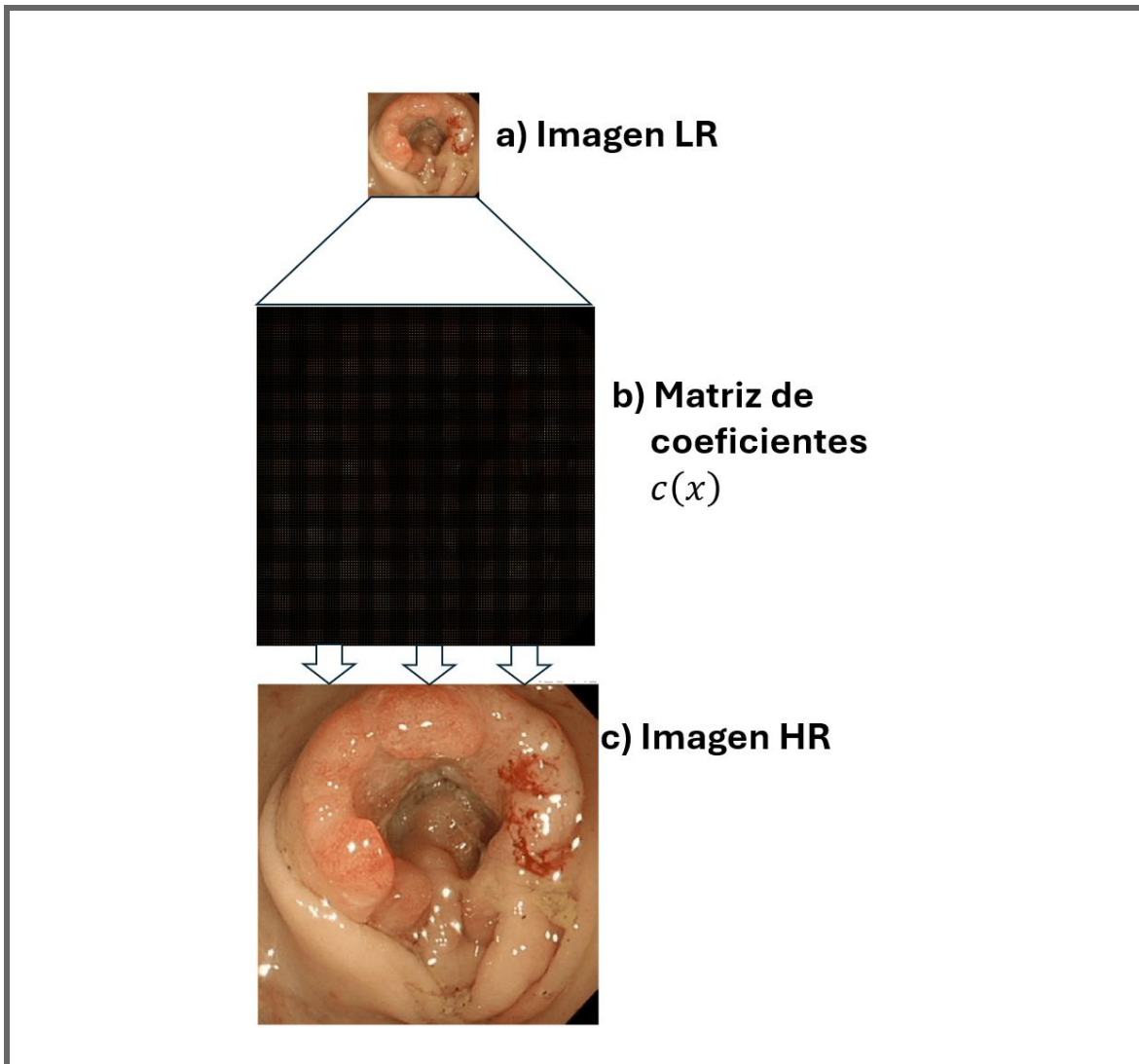


Figura 2 7. a) Imagen de baja resolución LR, b) Matriz de coeficientes $c(x)$, c) Imagen equivalente de alta resolución HR.

2.6 Técnicas de interpolación polinomial

Las técnicas de interpolación polinomial se desarrollan a partir de la ecuación 2.1 sustituyendo $\beta(x - x_k)$ por una función que puede ser lineal o alguna función spline de tal forma que al calcular su convolución con la matriz de coeficientes $c(x_k)$ se obtenga una interpolación eficiente de la imagen de baja resolución [1-3]. A continuación, se describen los métodos clásicos de interpolación polinomial. Debido a que estos utilizan una distancia fija s para ponderar los pixeles vecinos, su complejidad es la más baja entre todos los algoritmos de superresolución existentes, lo cual no impacta necesariamente su efectividad.

2.6.1 Técnica de Interpolación “Bilineal”.

Si $\beta(x)$ se define como la convolución de dos pulsos rectangulares, entonces su valor es $\beta(x) = 1 - |x|$ para valores de $|x| < 1$ y cero para cualquier otro valor [1]. En este caso, se asume que la imagen está ordenada lexicográficamente en una sólo vector fila por fila o columna por columna. Por otra parte, a partir de la figura 2.5, la distancia s entre los pixeles x y x_k , así como la distancia s entre x_{k+1} y x se definen de la siguiente manera:

$$s = x - x_k \text{ y } 1 - s = x_{k+1} - x \quad (2.2)$$

De esta forma, el modelo para la interpolación bilineal se define como:

$$f_{HR}(x) = (1 - s)f(x_k) + sf(x_{k+1}) \quad (2.3)$$

Esta técnica se denomina interpolación lineal o bilineal y consiste simplemente en la estimación de los pixeles a interpolar partir de una superficie lineal formada con los pixeles vecinos conocidos de la imagen original. Es decir, el método es una función lineal de x y s .

2.6.2 Técnica de interpolación Bicubica

Si se realiza la convolución entre tres pulsos rectangulares, se obtiene el kernel de interpolación bicúbica, el cual está definido como

$$\beta(x) = \frac{3}{2} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2} \text{ para } 0 \leq |x| < 1, \quad (2.4)$$

$$\beta(x) = \frac{(2-|x|)^3}{6} \text{ para } 1 \leq |x| < 2 \quad (2.5)$$

y cero para cualquier otro valor.

Al sustituir $\beta(x)$ en la ecuación 2.1, se obtiene una convolución o combinación lineal entre los 16 valores de los pixeles vecinos sobre las filas y columnas de la rejilla $c(x)$. La ecuación resultante de para la interpolación bicúbica es entonces:

$$\begin{aligned} f_{HR}(x) = & c(x_{k-1})[(3+s)^3 - 4(2+s)^3 + 6(1+s)^3 - 4s^3]/6 \\ & + c(x_k)[(2+s)^3 - 4(1+s)^3 + 6s^3]/6 \\ & + c(x_{k+1})[(1+s)^3 - 4s^3]/6 + c(x_{k+2})s^3/6 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Debido a que esta técnica utiliza cuatro veces más pixeles de información que la interpolación bilineal, produce una mejor calidad de imagen.

2.6.3 Técnica de interpolación O-MOMS.

La Interpolación Óptima de Máximo Orden y Mínimo Soporte, conocida por su abreviatura O-MOMS, forma parte de una familia de funciones base en la forma de curvas spline. En este sentido, una curva spline es una función que puede describirse en términos de un polinomio. Las técnicas de interpolación basadas en curvas spline generalmente funcionan mejor que los métodos de interpolación lineales descritos en las secciones anteriores ya que los pixeles utilizados en la interpolación mantienen una relación funcional más correlacionada. En este caso utilizaremos la interpolación O-MOMS bicúbica, la cual se calcula a partir de la ecuación 2.7:

$$f_{HR}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^3 - |x|^2 + \frac{1}{14}|x| + \frac{13}{21}, & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + |x|^2 - \frac{85}{42}|x| + \frac{29}{21}, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (2.7)$$

Nuevamente, aplicando la relación entre x y s de la figura 2.5, se obtiene el modelo de interpolación que puede ser aplicado fila por fila y columna por columna:

$$\begin{aligned} f_{HR}(x) = & c(x_{k-1}) \left[-\frac{1}{6}(1+s)^3 + (1+s)^2 - \frac{85}{42}(1+s) + \frac{29}{21} \right] \\ & + c(x_k) \left[\frac{1}{2}s^3 - s^2 + \frac{s}{14} + \frac{13}{21} \right] \\ & + c(x_{k+1}) \left[\frac{1}{2}(1+s)^3 + (1-s)^2 - \frac{s}{14} + \frac{13}{21} \right] \\ & + c(x_{k+2}) \left[-\frac{1}{6}(2-s)^3 + (2-s)^2 - \frac{85}{42}(2-s) + \frac{29}{21} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.7 Técnicas de interpolación adaptivas

Las técnicas de interpolación polinomial son las más utilizadas en el campo de la superresolución debido a su simplicidad. Sin embargo, ninguno de estos algoritmos toma en cuenta las variaciones locales entre los píxeles a lo largo de la superficie de la imagen, lo cual puede causar cierta difuminación en la imagen de alta resolución que hace necesario utilizar procesos adicionales de mejoramiento y filtrado para lograr la calidad requerida.

A continuación, se describen algunas técnicas de interpolación que pueden ofrecer un mejor desempeño mediante el uso de adaptación.

2.7.1 Interpolación con distancia deformada.

Este algoritmo es el más simple entre las técnicas adaptivas y puede aplicarse a cualquier método de interpolación polinomial. La técnica consiste fundamentalmente en modificar la distancia s que aparece en la figura 2.5 por una distancia s' la cual depende de la homogeneidad o no homogeneidad de la vecindad de cada pixel a interpolar. La distancia s' se calcula mediante la ecuación 2.9:

$$s' = s - k * \tau A_n * s * (s - 1) \quad (2.9)$$

Donde A_n depende de la simetría en los píxeles de la vecindad de x_{k+1} y se define como:

$$A_n = \frac{|c(x_{n+1}) - c(x_{n-1})| - |c(x_{n+2}) - c(x_n)|}{L_{max} - 1} \quad (2.10)$$

El factor L_{max} depende de la cantidad de tonalidades que se pueden representar con el número de bits utilizado para codificar cada pixel de la imagen. Generalmente, $L_{max} =$

256 para píxeles de 8 bits. El parámetro τ es un número entero positivo que sirve para ajustar el grado de difuminación sobre la imagen resultante.

2.7.2 Interpolación ponderada.

En el algoritmo anterior los valores de los píxeles x se mantenían sin cambio y se deformaba la distancia s . Ahora el método consiste en lo contrario, mantener fija la distancia s y ponderar los valores de los píxeles mediante el uso de pesos adaptivos de espacio variable.

De esta forma, el método de interpolación bilineal con pesos ponderados es como en la ecuación 2.11:

$$f_{HR}(x) = (1 - s)a_0c(x_{k-1}) + sa_1c(x_{k+1}) \quad (2.11)$$

Donde $a_0 = 1 - \gamma A_n$ y $a_1 = 1 + \gamma A_n$.

A_n está definida de la misma forma que en la ecuación 2.10 y el factor γ es un número entero positivo que controla el peso o ponderación de los píxeles.

Para el caso de la interpolación bicúbica con pesos ponderados, el método se modifica como en la ecuación 2.12:

$$\begin{aligned} f_{HR}(x) = & a_{-1}c(x_{k-1}) [(3 + s)^3 - 4(2 + s)^3 + 6(1 + s)^3 - 4s^3]/6 \\ & + a_0c(x_k) [(2 + s)^3 + 4(1 + s)^3 + 6s^3]/6 \\ & + c(x_{k+1}) [(1 + s)^3 - 4s^3]/6 + a_2c(x_{k+2}) s^3/6 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde $a_{-1} = a_0 = 1 - \gamma A_n$ y $a_1 = a_2 = 1 + \gamma A_n$.

La interpolación O-MOMS bicúbica quedaría como en la ecuación 2.13:

$$\begin{aligned}
 f_{HR}(x) = & a_{-1}c(x_{k-1}) \left[-\frac{1}{6}(1+s)^3 + (1+s)^2 - \frac{85}{42}(1+s) + \frac{29}{21} \right] \\
 & + a_0c(x_k) \left[\frac{1}{2}s^3 - s^2 + \frac{s}{14} + \frac{13}{21} \right] \\
 & + a_1c(x_{k+1}) \left[\frac{1}{2}(1+s)^3 + (1-s)^2 - \frac{s}{14} + \frac{13}{21} \right] \\
 & + a_2c(x_{k+2}) \left[-\frac{1}{6}(2-s)^3 + (2-s)^2 - \frac{85}{42}(2-s) + \frac{29}{21} \right]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

De la misma forma, $a_{-1} = a_0 = 1 - \gamma A_n$ y $a_1 = a_2 = 1 + \gamma A_n$.

2.8 Interpolación adaptiva usando redes neuronales

Los métodos adaptivos basados en la minimización del error cuadrático medio o MSE son los más ampliamente utilizados en el campo del procesamiento de señales. A continuación, se describe un modelo de interpolación polinomial basado en la minimización del MSE, usando para ello una red neuronal de tres capas alimentada con vectores de entrenamiento obtenidos de imágenes interpoladas con los métodos descritos en las secciones anteriores. Para la optimización del proceso de interpolación no se requiere utilizar una red demasiado compleja, por lo que una arquitectura simple compuesta por las capas de entrada y salida con una capa oculta entre estas es suficiente para realizar la interpolación. El entrenamiento de la red neuronal se realiza ajustando los coeficientes mediante un algoritmo de retropropagación de tal forma que al multiplicarlos por el valor de las neuronas en la capa de entrada y la capa oculta se minimice la suma del error en la capa de salida.

2.8.1 Fundamentos de las redes neuronales

Una red neuronal es un modelo computacional y una herramienta de optimización capaz de emular el funcionamiento del cerebro humano en procesos de aprendizaje. Su arquitectura se compone de un conjunto finito de unidades elementales de aprendizaje organizadas e interconectadas entre sí en diferentes capas, como se muestra en la figura 2.8.

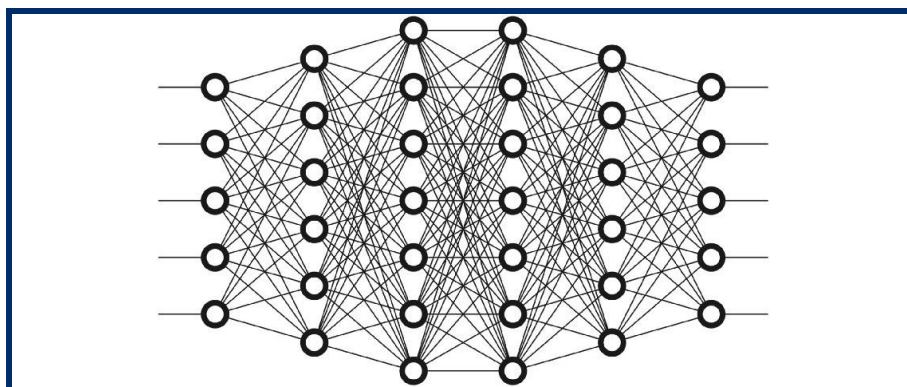


Figura 2.8: Forma general de una red neuronal.

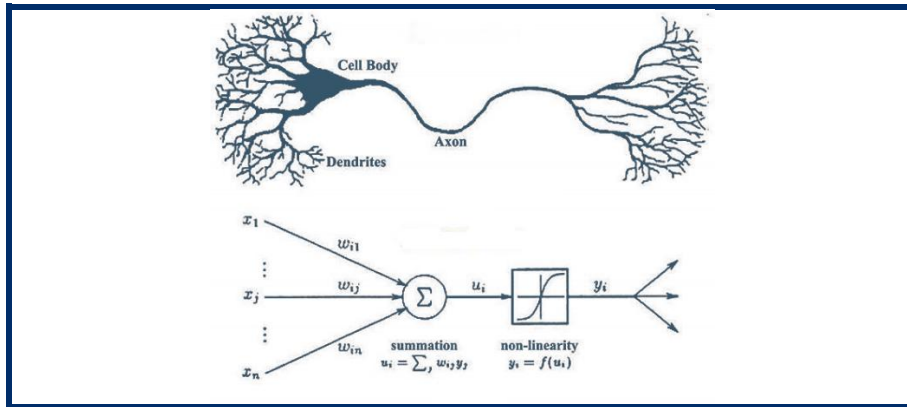


Figura 2.9: Neurona del cerebro humano y neurona de una red neuronal artificial.

A la unidad elemental de aprendizaje de una red neuronal se le denomina neurona debido a que funcionalmente su operación tiene un papel similar al de una neurona del cerebro humano, aunque en este caso su respuesta está definida en forma más precisa a través de un modelo matemático denominado función de activación, como se muestra en la figura 2.9. Las neuronas en una red neuronal artificial están interconectadas por aristas, simulando la sinapsis, un término utilizado para definir la unión funcional y la comunicación entre las neuronas del cerebro humano. Existen diferentes arquitecturas de redes neuronales y todas estas se caracterizan por la cantidad de capas en las que se organizan las neuronas y por la forma en la cual se calcula la respuesta de cada neurona y la relación entre la entrada y la salida de la red. Un tipo de red neuronal ampliamente utilizado es una red multicapa llamada red de retropropagación, aunque es importante mencionar que esta no es la única red que utiliza una arquitectura con varias capas. Como se ilustra en la figura 2.10, la primera capa de la red se denomina capa de entrada, mientras que la última capa es la capa de salida. Entre estas dos capas existe al menos una capa intermedia denominada capa oculta. Sin embargo, puede agregarse un mayor número de capas ocultas para mejorar la capacidad de aprendizaje de la red, al costo de incrementar exponencialmente la complejidad. Las redes con 10 o más capas ocultas requieren algoritmos altamente complejos capaces de realizar un aprendizaje mucho más profundo, pero requieren del uso de equipos de cómputo de muy alto rendimiento para reducir el tiempo de entrenamiento de la red. Debido a las

restricciones del proyecto, en este caso se utiliza una arquitectura simple con una sola capa oculta.

2.8.2 Conceptos generales de las redes neuronales.

En el contexto de las redes neuronales, una **neurona** es un elemento de procesamiento autónomo que intenta modelar el papel de una neurona del cerebro humano. Una red neuronal consiste en la interconexión de un conjunto de neuronas organizadas por capas o niveles. Las arquitecturas de red más simples consisten en un par de capas, otras redes utilizan tres capas, y las arquitecturas avanzadas llegan a emplear más de diez capas de neuronas en una sola red o, pueden emplear varias redes con un número reducido de capas cada una, las cuales son optimizadas simultáneamente apoyándose entre sí para obtener mejores resultados. Una neurona realiza un procesamiento muy simple el cual consiste en recibir los valores que le envían varias neuronas, aplicar una transformación a estos datos mediante una función de activación y retransmitir el resultado de salida a las neuronas ubicadas en la siguiente capa.

Por otra parte, se utiliza el término **capa** para describir una colección de neuronas que deben desempeñar una función común. Ninguna neurona está interconectada con otras neuronas dentro de la misma capa. Todas las redes neuronales contienen una capa de entrada y una capa de salida y, dependiendo de su arquitectura, se pueden agregar capas intermedias u ocultas. En cualquiera de estas capas existe al menos una neurona.

Otro concepto utilizado en las redes neuronales es el de **arco**, el cual se utiliza para denominar a cada una de las líneas de comunicación que conectan unidireccionalmente las neuronas entre las diferentes capas de la red. En las redes con propagación hacia adelante la información fluye desde la capa de entrada hasta la capa de salida, mientras que en las redes con propagación hacia atrás o con retro-propagación, la información fluye en sentido contrario, comenzando en la capa de salida y terminando en la capa de entrada.

El siguiente concepto hace referencia a un elemento que se ubica sobre los arcos que conecta una neurona con otra. Los **coeficientes** son valores reales que indican la influencia de una neurona tiene sobre otra. Generalmente se agrupan en vectores y sus valores son actualizados en cada iteración durante la fase de entrenamiento de la red hasta obtener la salida que presente el nivel de error máximo aceptable. Estos conceptos pueden verse aplicados en la arquitectura de red multicapa mostrada en la figura 2.10, la cual es precisamente el tipo de red que se utilizará en este trabajo.

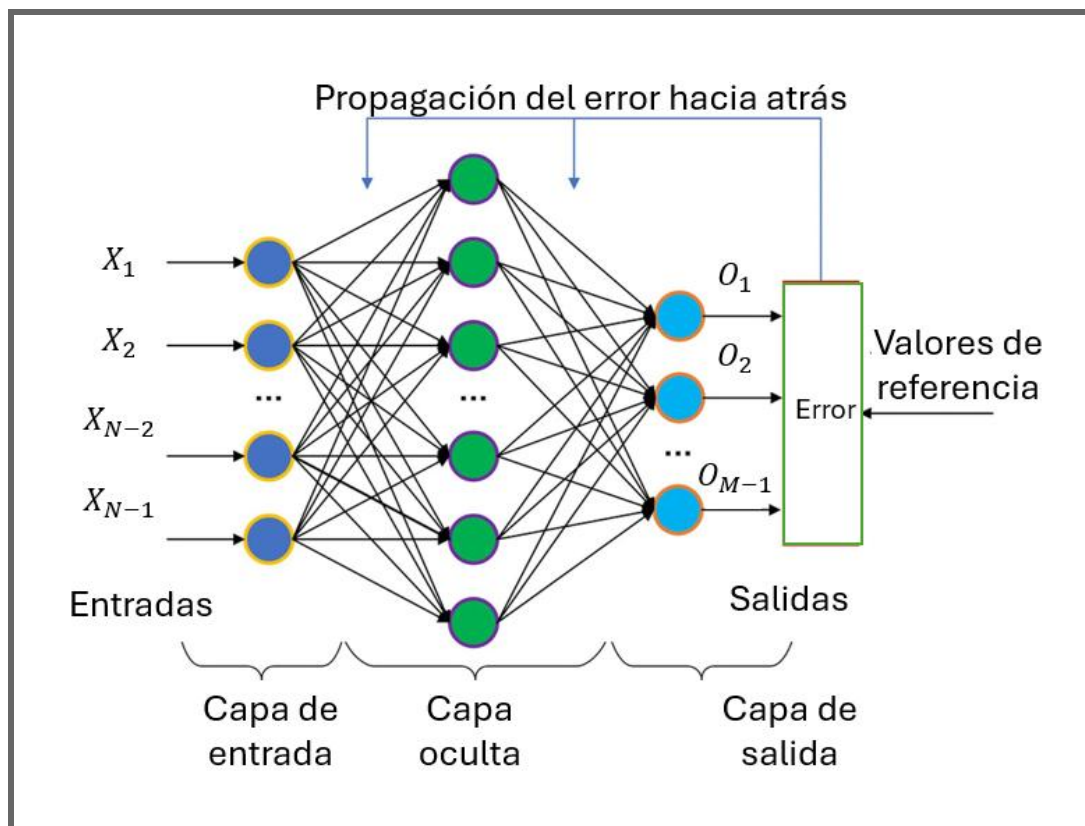


Figura 2 10. Arquitectura de la red neuronal.

2.9 Algoritmo de entrenamiento de la red neuronal.

En este trabajo se utilizará el algoritmo de entrenamiento de propagación del error hacia atrás o EBP por sus siglas en inglés (*Error Back Propagation*). En este caso, dado que se utilizará una arquitectura de tres capas para la red, el algoritmo utiliza una relación entrada-salida conocida a priori para calcular en cada iteración la diferencia entre la salida estimada y la de referencia. Posteriormente el error es utilizado para adaptar los valores de los pesos o coeficientes entre la capa de salida y la capa oculta, así como los coeficientes entre la capa oculta y la capa de entrada., lo que se denomina propagación del error hacia atrás. La entrada a la red se forma con las imágenes interpoladas con los polinomios y la salida esperada o de referencia se toma con los valores de la imagen de referencia de alta resolución a la que se pretende igualar mediante el proceso de interpolación. Se supone que después de completar la fase de entrenamiento, la red será capaz de funcionar para cualquier entrada de datos, siempre y cuando estos se hayan obtenido de la aplicación de los mismos algoritmos de interpolación y se hayan organizado vectorialmente en el mismo orden lexicográfico. A continuación, se describe el algoritmo de entrenamiento completo.

1. Sea I el número de neuronas en la capa de entrada, determinado por la longitud de los vectores de entrenamiento de entrada. I también es el número de neuronas en la capa de salida. A continuación, se define el valor J , que representa el número de neuronas en la capa oculta.
2. Se inicializan los pesos de la red con valores aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[-0.1, 0.1]$. Se define también la tasa de aprendizaje $\eta > 0$ y el valor de error objetivo E_{min} (para la fase de entrenamiento se definió un error máximo $E_{min} = 1 \times 10^{-10}$).
3. Se inicializan los umbrales para la activación de las neuronas. Estos valores nunca deben cambiar ($x_0 = 1, z_0 = 1$).

4. Se inicializan las variables de ciclo $p = 1$ y $q = 1$ utilizadas para controlar el número de ciclos de entrenamiento y las iteraciones en cada ciclo, respectivamente.

5. Se utiliza la función de activación (2.13) para propagar las activaciones de las neuronas de la capa de entrada a las neuronas de la capa oculta:

$$z_j = \frac{1}{1 + e^{-(\sum_{i=0}^I v_i x_i)}} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad (2.13)$$

6. Se utiliza la función de activación (2.14) para propagar las activaciones de las neuronas de la capa oculta a las neuronas de la capa de salida:

$$O_i = \frac{1}{1 + e^{-(\sum_{j=0}^J w_i z_j)}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, I \quad (2.14)$$

7. Se calcula el valor del error en cada iteración:

$$E_i = \frac{1}{2} (d_i - O_i)^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, I \quad (2.15)$$

8. Se calcula el error en las neuronas de la capa de salida. El error en cada neurona se basa en la diferencia entre la salida actual de la red O_i y la señal objetivo d_i :

$$\delta_{O_i} = (d_i - O_i)(1 - O_i)O_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, I \quad (2.16)$$

9. Se calcula el error en las neuronas de la capa oculta usando la siguiente ecuación:

$$\delta_{z_j} = z_j(1 - z_j) \sum_{i=1}^I \delta_{O_i} w_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad (2.17)$$

10. Se ajustan los pesos entre la capa oculta y la capa de salida de la siguiente manera:

$$w_{ij} = w_{ij} + \eta \delta_{oi} z_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, I \text{ y para } j = 1, 2, \dots, J \quad (2.18)$$

11. Se ajustan los pesos entre la capa de entrada y la capa oculta de la siguiente manera:

$$v_{ij} = v_{ij} + \eta \delta_{zj} x_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, I \text{ y para } j = 1, 2, \dots, J \quad (2.19)$$

12. Si $p < I$, entonces $p = p + 1, q = q + 1$ repetir desde el paso 4. En caso contrario, continuar con el paso 13.

13. Si $E < E_{min}$ finalizar el proceso de entrenamiento. Obtener las salidas $\mathbf{W}, \mathbf{V}, q$ y E . En caso contrario reinicializar $p = 1$ y comenzar un nuevo ciclo de entrenamiento desde el paso 4.

2.10 Interpolación polinomial usando la red neuronal

Los pasos para llevar a cabo la implementación de la red neuronal para las técnicas de interpolación polinomial se agrupan en dos procesos: el de entrenamiento y el de pruebas. A continuación, se describen estas dos fases de la implementación, así como los pasos necesarios:

2.10.1 Fase de entrenamiento

1. Inicia con la interpolación polinomial de una imagen y dos réplicas idénticas. A cada una de ellas se aplica una técnica de interpolación diferente, es decir, a la primera se aplica la interpolación bilineal, a la segunda se aplica la interpolación bicúbica y a la tercera se aplica la interpolación O-MOMS bicúbica.

2. Se divide cada imagen en diferentes regiones de interés para reducir el tiempo de procesamiento de la red neuronal. En cada fase de entrenamiento se construye un vector organizado lexicográficamente tomando de cada región de interés dos puntos de la región bilineal y cuatro puntos para las regiones bicúbica y O-MOMS bicúbica.
3. Todos los vectores (uno por cada región de interés) son usados como entradas a la red, obteniendo a la salida su interpolación como resultado.
4. El entrenamiento de la red se realiza con todo el conjunto de datos disponible.

2.10.2 Fase de pruebas

1. En la imagen a interpolar, los puntos de entrada de cada región usados para la estimación de cada pixel se organizan lexicográficamente en forma de vector
2. Este vector se introduce en la red para estimar el valor de los pixeles correspondientes.

2.11 Métricas de calidad.

Las métricas de calidad sirven para medir el grado de distorsión de una imagen cuando se somete a procesamiento. Para que puedan implementarse estas métricas requieren de una imagen de referencia sin distorsión para poder realizar la comparación con la imagen distorsionada. Existen dos métricas principales las cuales son las más ampliamente utilizadas en el campo del procesamiento de imágenes. La primera es la Relación Pico Señal a Ruido o PSNR y la segunda es el Índice de Similitud Estructural o SSIM.

2.11.1 La relación señal a ruido pico.

El PSNR determina la relación de la energía de una señal y el ruido que la afecta. Su valor en escala logarítmica está dado en dB y su expresión matemática está dada por la Ecuación 2.14, es una medida relativa de la calidad de imagen y se basa en el error cuadrático medio (MSE), el cual se utiliza como medida de desviación del promedio cuadrático para hallar la estimación del valor verdadero, es entonces la medida objetiva más común para comparar el filtrado de una imagen, especialmente cuando la imagen se ha sometido a algún proceso de compresión. El PSNR se define como en la ecuación 2.20:

$$PSNR = 10 \log \left[\frac{255^2}{MSE} \right] dB \quad (2.20)$$

donde

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [|F_{HR}(x) - \hat{F}_{HR}(x)|] \quad (2.21)$$

donde M y N son el número de filas y columnas de la imagen, respectivamente.

Generalmente, valores de PSNR entre 30 y 50 se consideran aceptables y entre mayor sea el valor también lo es la calidad de la imagen.

2.11.2 El índice de Similitud Estructural

El índice de similitud estructural (SSIM) es una medida que pretende cuantificar de forma numérica y automática la calidad visual de una imagen para un observador humano. El SSIM consiste en comparar tres aspectos de una imagen: la luminancia, el contraste y la estructura está definido como en la ecuación 2.22:

$$SSIM = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(2\mu_x^2\mu_y^2 + C_1)(2\sigma_x^2\sigma_y^2 + C_2)} \quad (2.22)$$

En donde $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ y σ_{xy} son la media, varianza y covarianza de la imagen de referencia y la imagen interpolada. C_1 y C_2 son dos constantes que dependen del rango dinámico de valores de píxel.

La media de la imagen de referencia y la imagen interpolada es:

$$\mu_{f_x} = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_x(m, n) \quad (2.23)$$

$$\mu_{\hat{f}_x} = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \hat{f}_x(m, n) \quad (2.24)$$

Asimismo, la varianza de la imagen de referencia y de la imagen interpolada son:

$$\sigma_{f_x} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [f_x(m, n) - \mu_{f_x}]^2} \quad (2.25)$$

$$\sigma_{\hat{f}_x} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\hat{f}_x(m, n) - \mu_{\hat{f}_x}]^2} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{f_x \hat{f}_x} = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [f_x(m, n) - \mu_{f_x}] [\hat{f}_x(m, n) - \mu_{\hat{f}_x}] \quad (2.27)$$

Para calcular el SSIM, es necesario además definir las siguientes constantes:

$$k_1 = 0.01$$

$$k_2 = 0.03$$

$$C_1 = (k_1 L)^2$$

$$C_2 = (k_2 L)^2$$

De esta forma, el Índice de Similitud Estructural se define como:

$$SSIM = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(2\mu_x^2\mu_y^2 + C_1)(2\sigma_x^2\sigma_y^2 + C_2)} \quad (2.28)$$

Capítulo

3

3. Implementación de los algoritmos

En este capítulo se describe la implementación de los cuatro métodos adaptivos y el método basado en una red neuronal usando imágenes de prueba del área biomédica, forestal y de radar de tipo RGB y en escala de grises. En primer lugar se presenta el diagrama de flujo del procedimiento general utilizado y posteriormente se presentan los diagramas de flujo detallados para cada algoritmo. Como podrá observarse en cada método, se incluyen los cálculos para la relación señal a ruido pico (PSNR) y el índice de similitud estructural (SSIM) como métricas de calidad.

3.1 Procedimiento general.

En la figura 3.1 se presenta el diagrama de flujo del procedimiento general utilizado para la evaluación de los algoritmos. Para cada uno de estos, se utiliza una imagen de prueba de alta resolución f_x a la cual se le aplica un submuestreo para generar una versión de baja resolución denotada por g_x . Se asume que esta versión degradada de f_x equivale a una imagen cualquiera de baja resolución adquirida mediante dispositivos de baja capacidad o transmitida a través de un canal limitado en ancho de banda. Los valores de g_x se utilizan para construir una matriz de coeficientes de interpolación denotada como c_x . Estos coeficientes son simplemente los valores de baja resolución de la matriz g_x intercalados con $N - 1$ ceros, siendo N el orden de interpolación. Por ejemplo, un valor $N = 2$ significa que la imagen g_x se amplificará al doble de resolución. Un valor $N = 4$ significa que la imagen estimada tendrá cuatro veces más resolución que la imagen g_x y esta misma lógica aplica para cualquier valor de N . Los algoritmos de superresolución son aplicados sobre la matriz de coeficientes c_x , la cual funciona como un molde que contiene la información mínima necesaria para estimar los pixeles desconocidos, inicialmente definidos con valor cero.

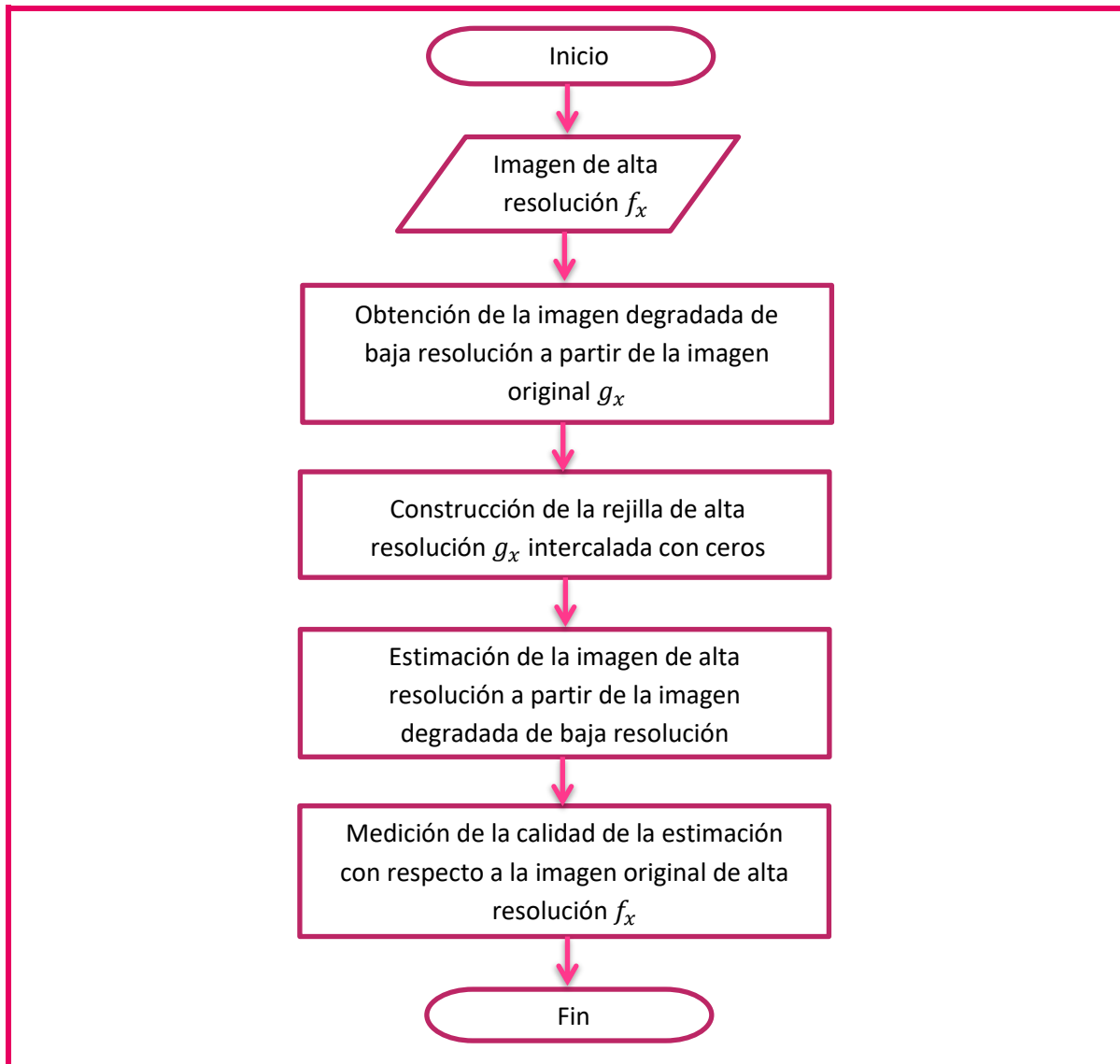


Figura 3 1. Diagramas de flujo con el procedimiento de interpolación y evaluación de los algoritmos.

3.2 Implementación del método de distancia deformada.

Siguiendo la lógica del diagrama de flujo mostrado en la figura 3.2, el algoritmo comienza con la carga de la imagen de prueba f_x , la obtención de la versión degradada g_x y de la rejilla c_x . Para implementar este método adaptivo, tal como se describió en la sección 2.2, es necesario calcular la distancia s' , lo cual requiere a su vez del cálculo del parámetro A_n . Estos cálculos deben repetirse para cada plano si es que se aplican sobre una imagen RGB, a diferencia de una imagen en escala de grises, en cuyo caso solamente se aplican en un plano. Por simplicidad,

se utilizan las letras $\hat{R}$, $\hat{G}$ y $\hat{B}$ para identificar la rejilla correspondiente a cada plano. En el caso de una imagen en escala de grises, sólo se utiliza la rejilla $\hat{R}$. La figura 3.3 muestra el diagrama de flujo con este procedimiento para los planos $\hat{G}$ y $\hat{B}$ para el caso de una imagen a color. La figura 3.4 muestra el mismo procedimiento aplicado a una imagen en escala de grises o para el plano $\hat{R}$ de la imagen RGB. En estos diagramas sólo se indica el proceso de interpolación, el cual será mostrado en detalle en la figura 3.6.

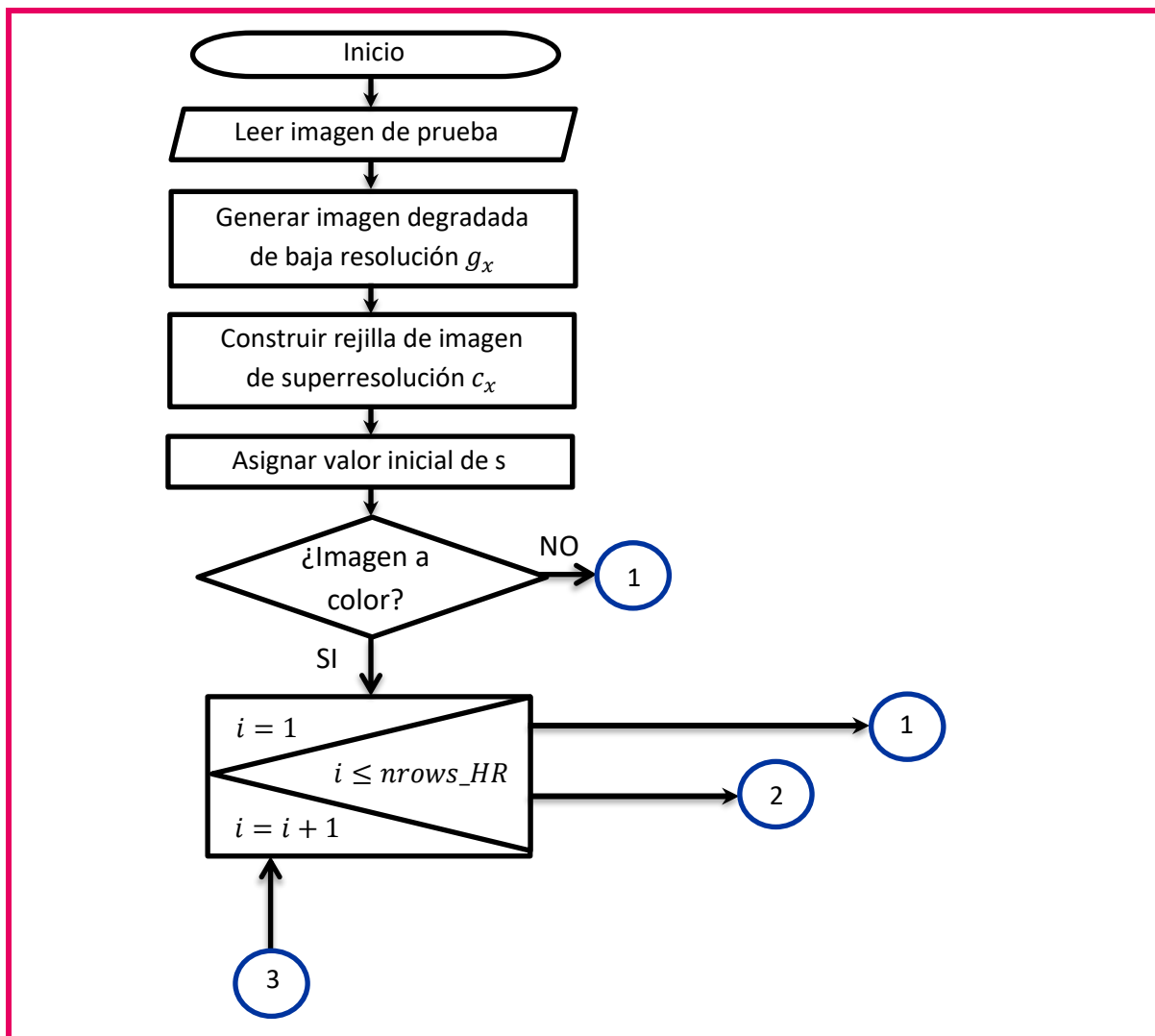


Figura 3 2. Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para los planos $\hat{G}$ y $\hat{B}$ de una imagen a color parte 1.

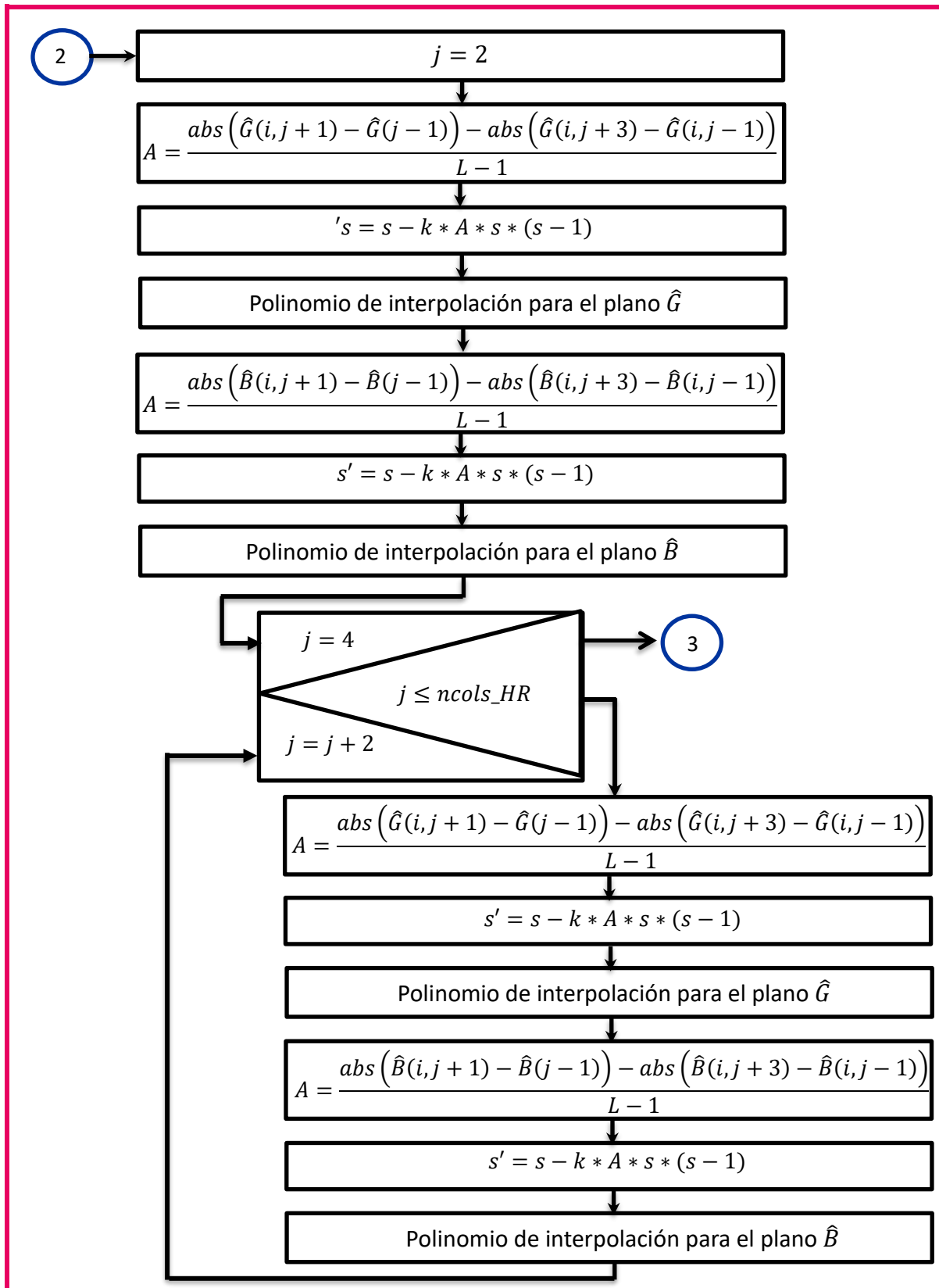


Figura 3 3. Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para los planos $\hat{G}$ y $\hat{B}$ de una imagen a color parte 2.

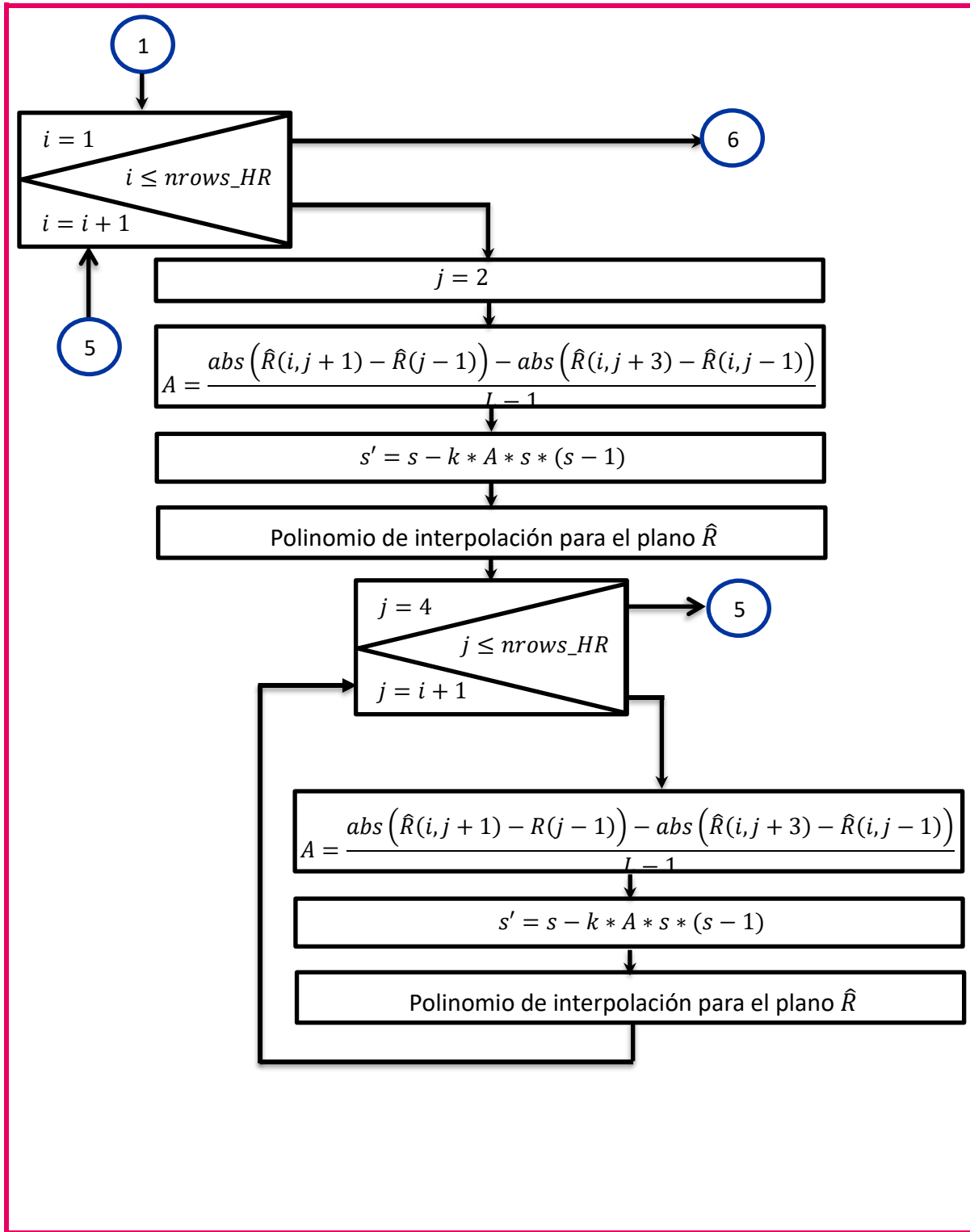


Figura 3 4. Diagramas de flujo del procedimiento de interpolación con distancia deformada para una imagen en escala de grises o el plano $\hat{R}$ de una imagen a color.

La figura 3.5 muestra el diagrama de flujo con el procedimiento para calcular las primeras dos métricas de calidad descritas en el apartado 2.5. En primer lugar, se calcula el MSE entre la imagen de referencia f_x (planos R , G y B) y la imagen estimada con los métodos de superresolución $\hat{f}_x$ (planos $\hat{R}$, $\hat{G}$ y $\hat{B}$). A partir de este valor se calcula la PSNR. Por otra parte, la figura 3.6 describe el procedimiento para calcular el índice de similitud estructural o SSIM a partir de la media, desviación estándar y varianza de cada plano.

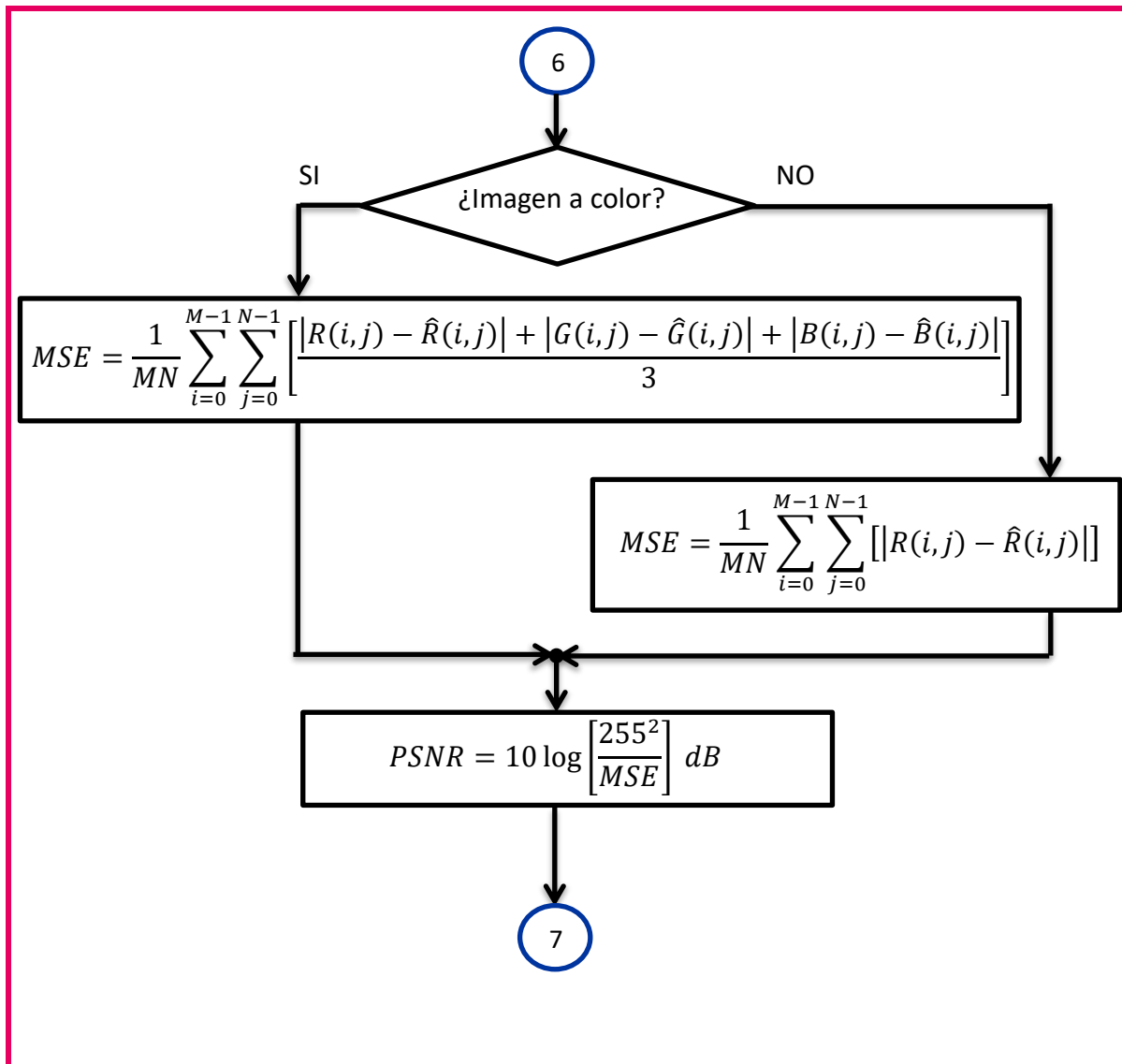


Figura 3 5. Diagramas de flujo con el procedimiento para calcular el MSE y PSNR.

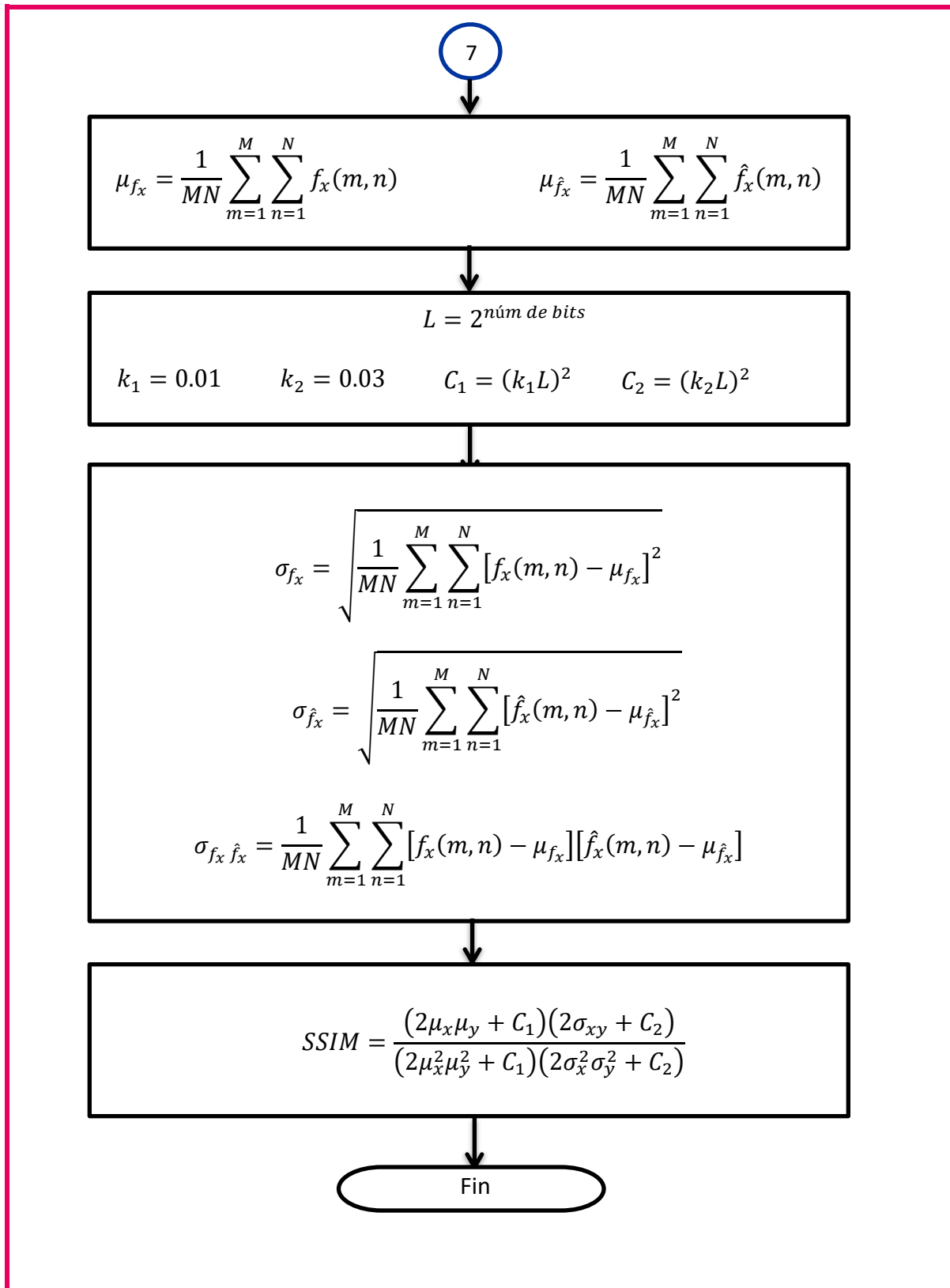


Figura 3 6. Diagramas de flujo con el procedimiento para calcular el SSIM.

La Figura 3.7 muestra el algoritmo para implementar la interpolación bilineal con distancia deformada.

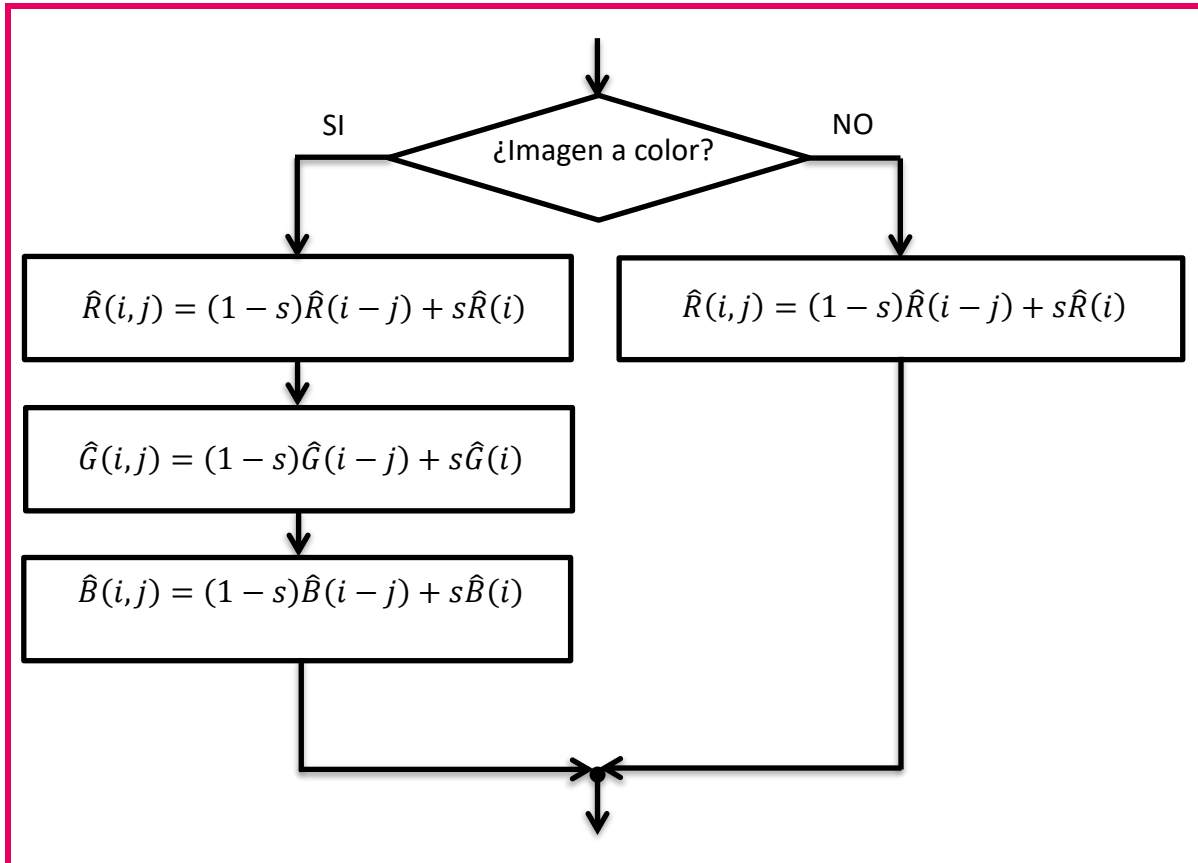


Figura 3 7. Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación bilineal.

La Figura 3.8 muestra el algoritmo para implementar la interpolación bicúbica con distancia deformada.

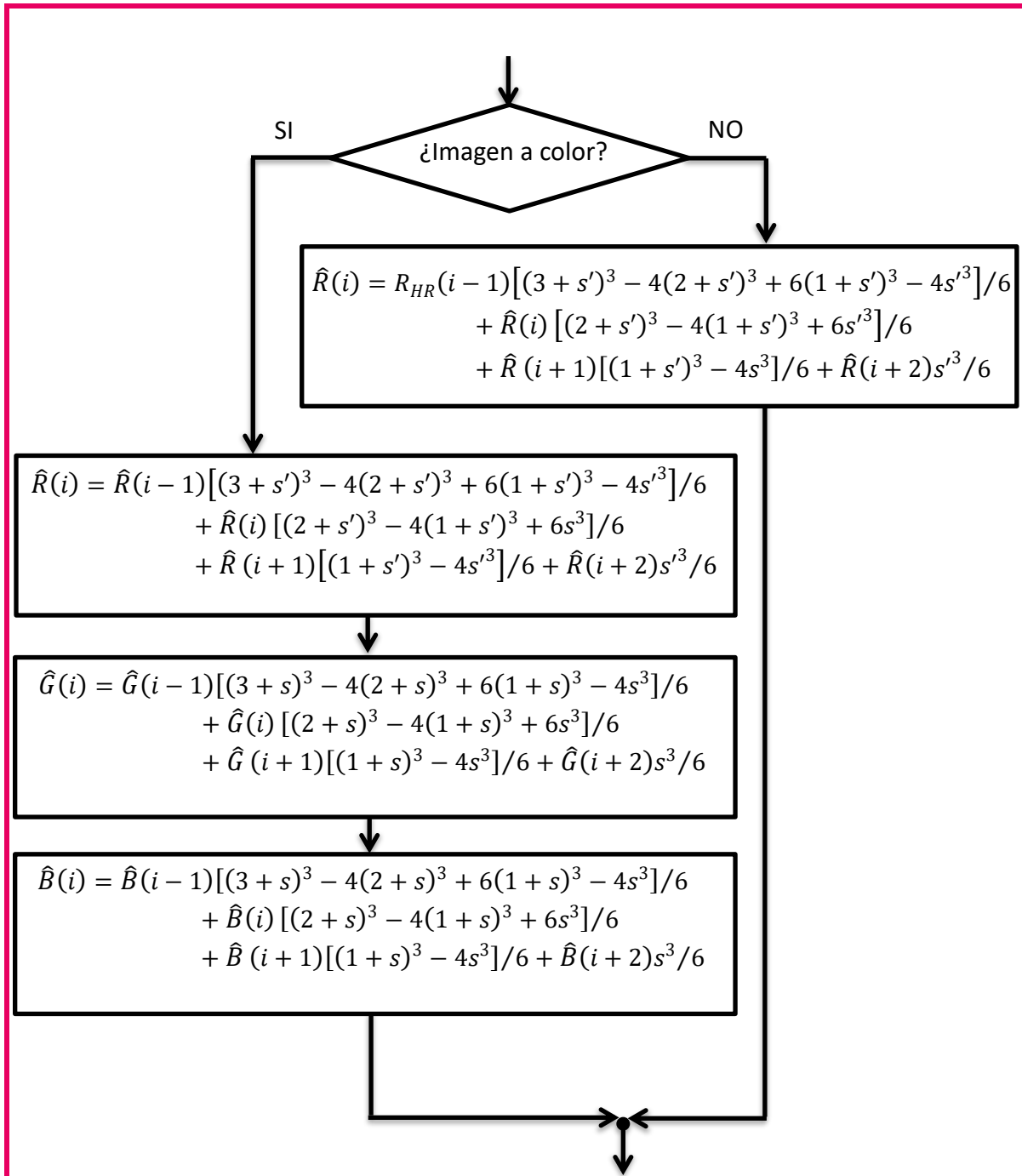


Figura 3.8. Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación bicúbica.

La Figura 3.9 muestra la interpolación O-MOMS bicúbica con distancia deformada.

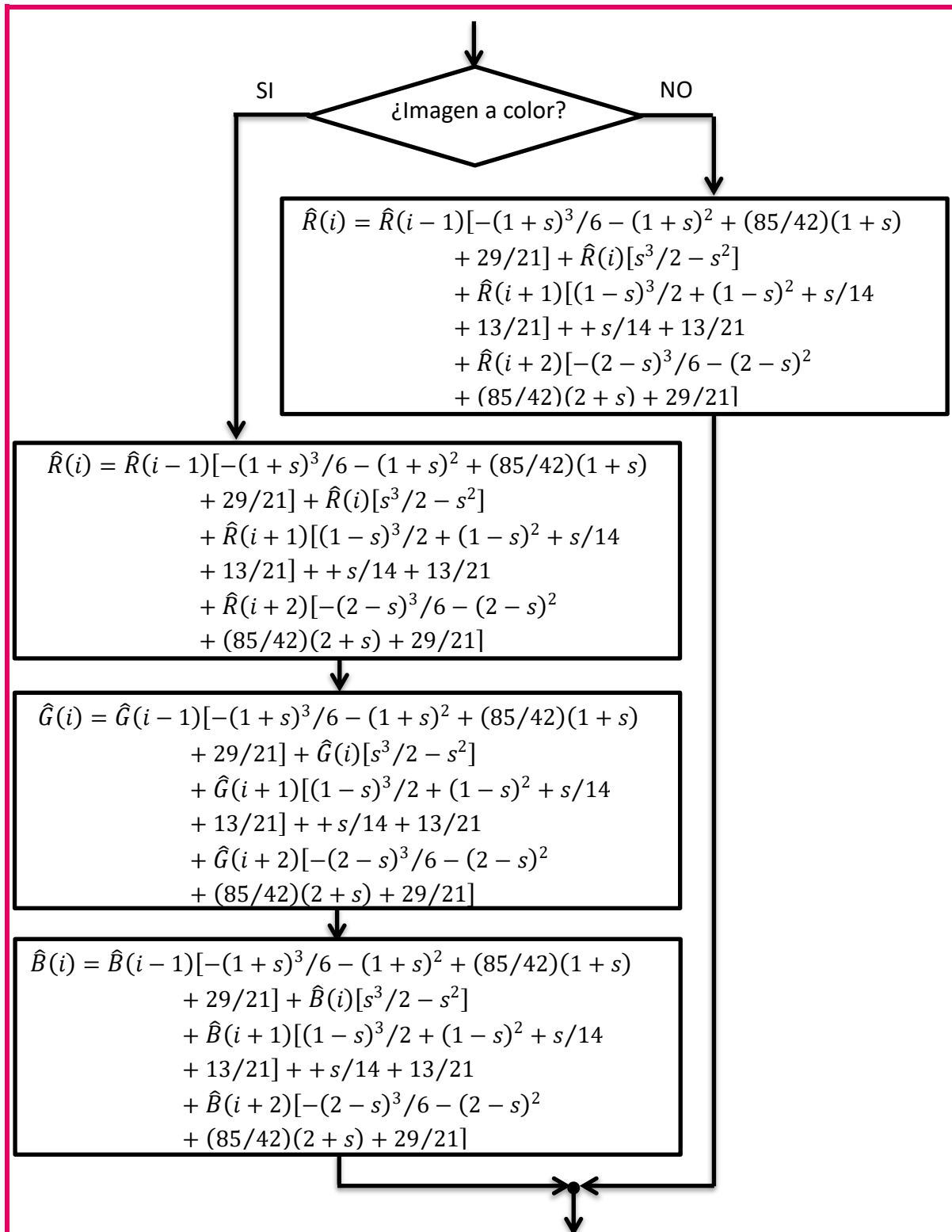


Figura 3.9. Diagramas de flujo con el procedimiento del polinomio de interpolación O-MOMS.

3.3 Implementación del método de interpolación ponderada.

La figura 3.10 muestra el algoritmo de interpolación bilineal con pesos ponderados.

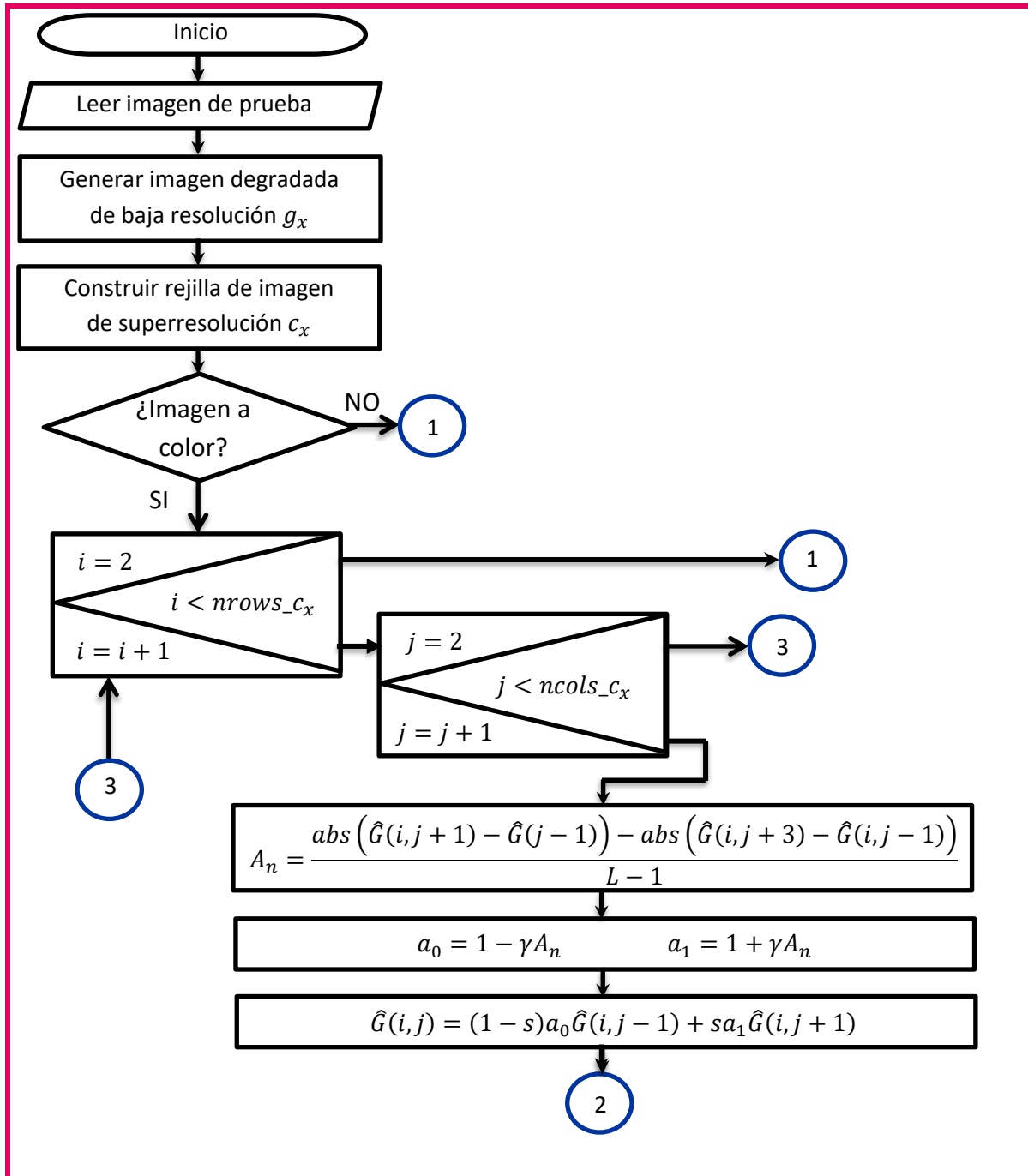


Figura 3.20. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

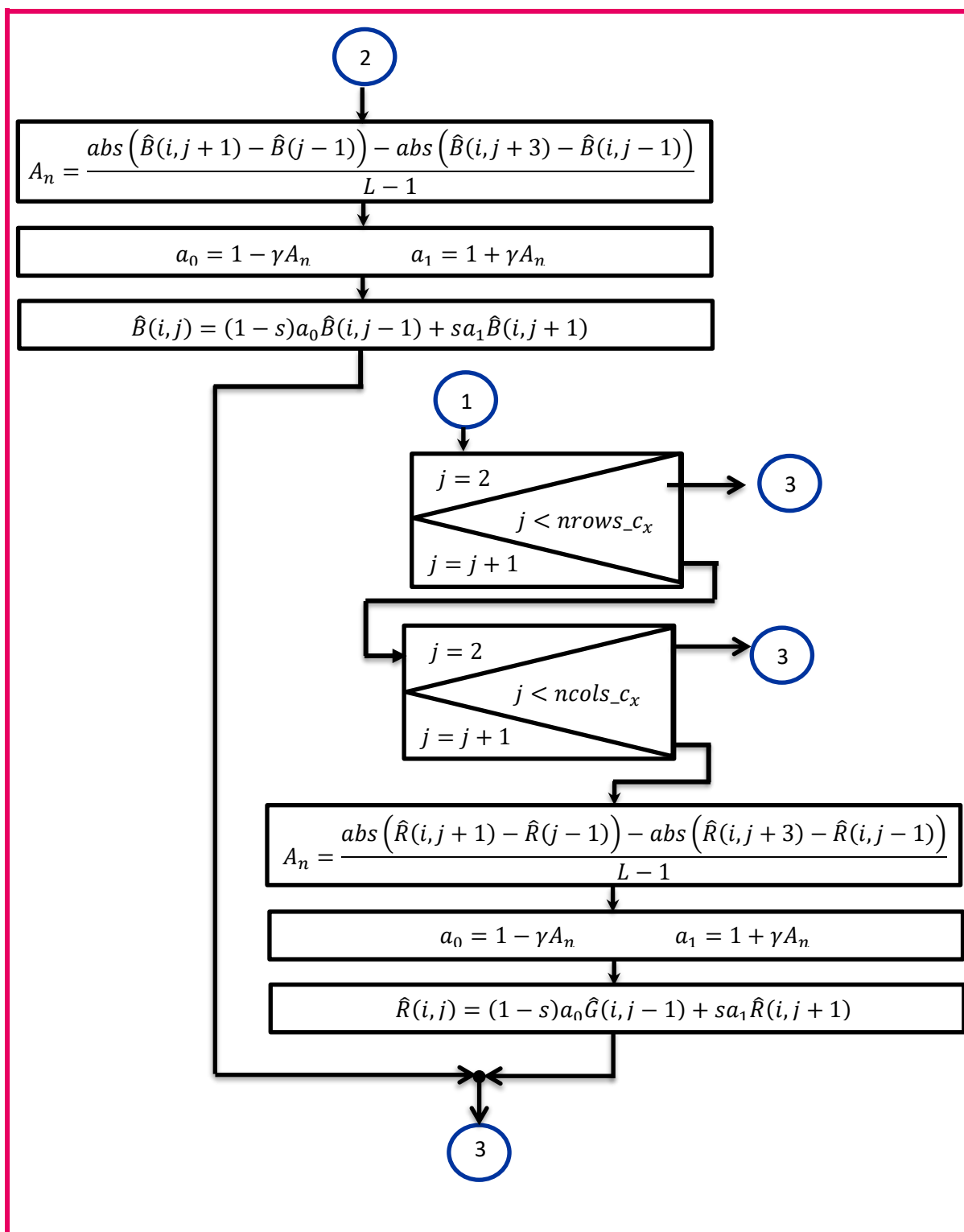


Figura 3 11. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

La figura 3.12 muestra el algoritmo de interpolación bicúbica con pesos ponderados.

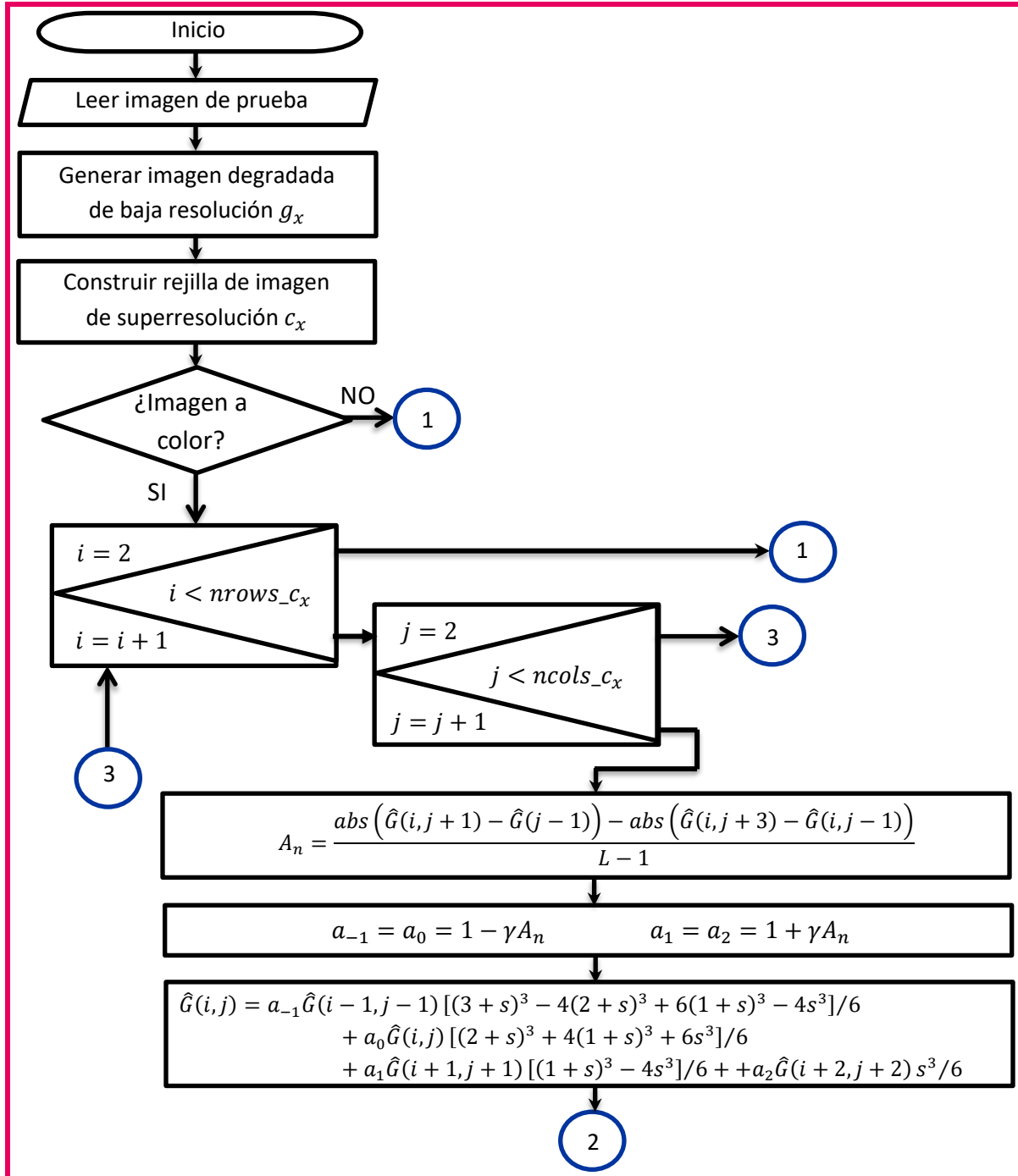


Figura 3 32. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

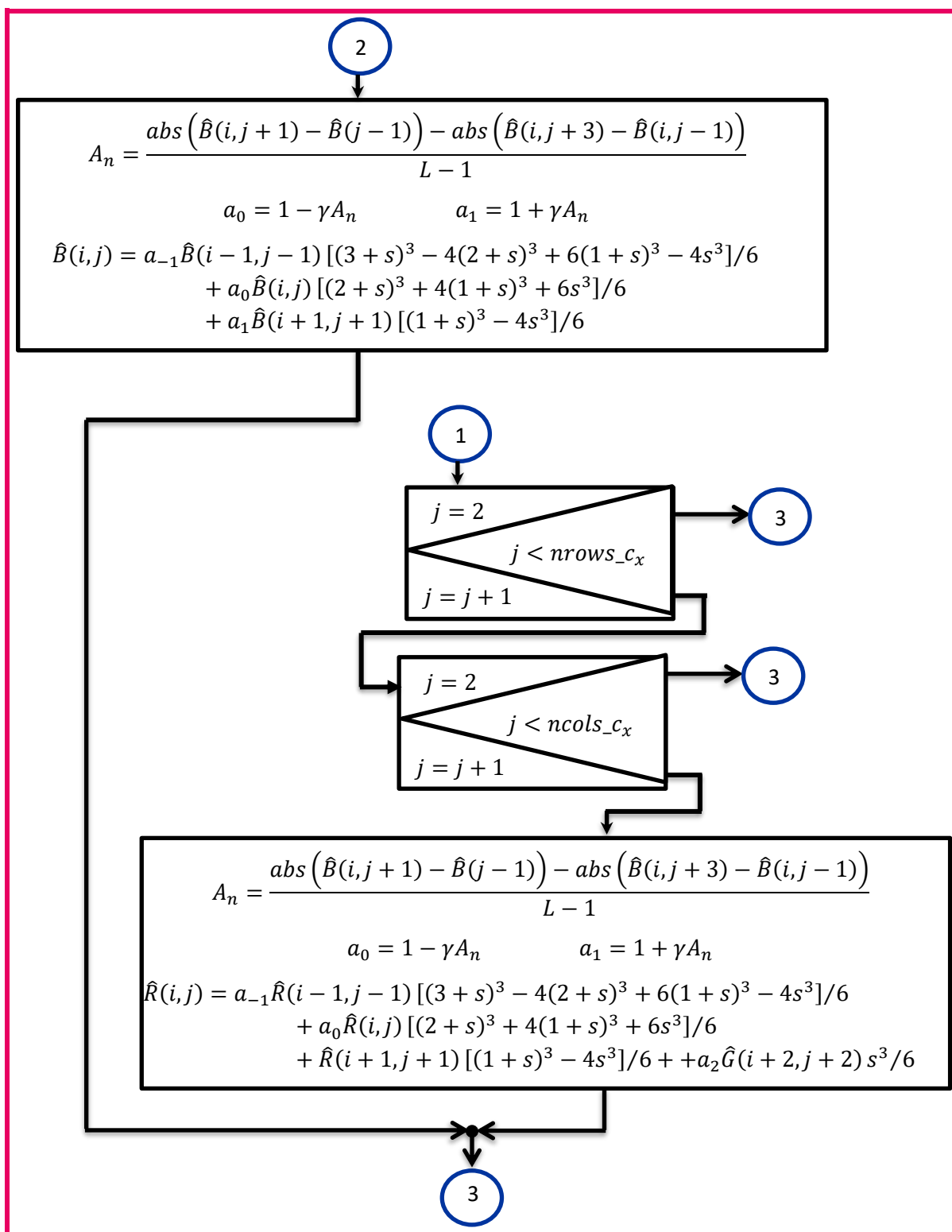


Figura 3.13. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación ponderada para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

La figura 3.14 muestra el algoritmo de interpolación O-MOMS bicúbica con pesos ponderados.

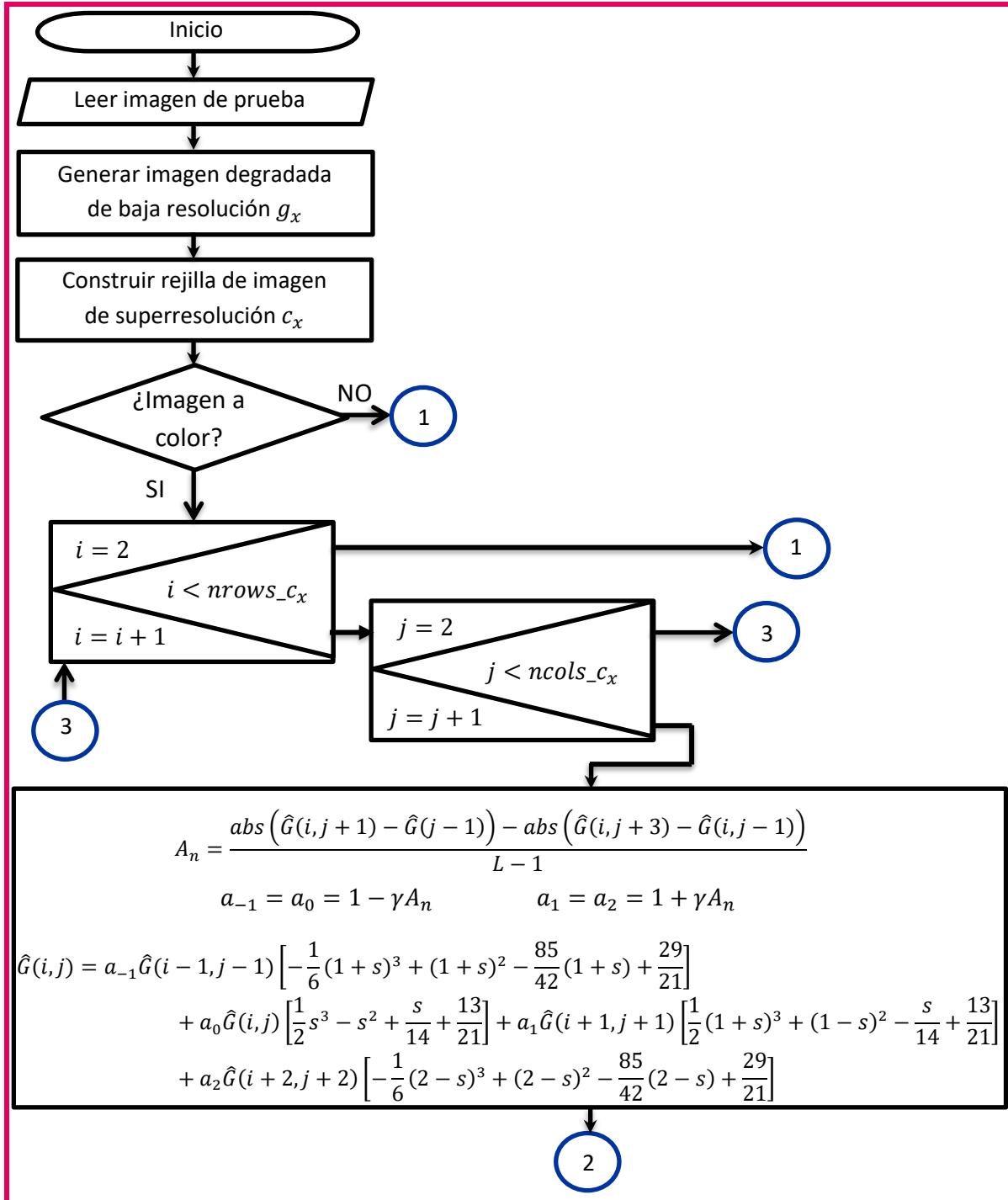


Figura 3.14. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación con distancia variable para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

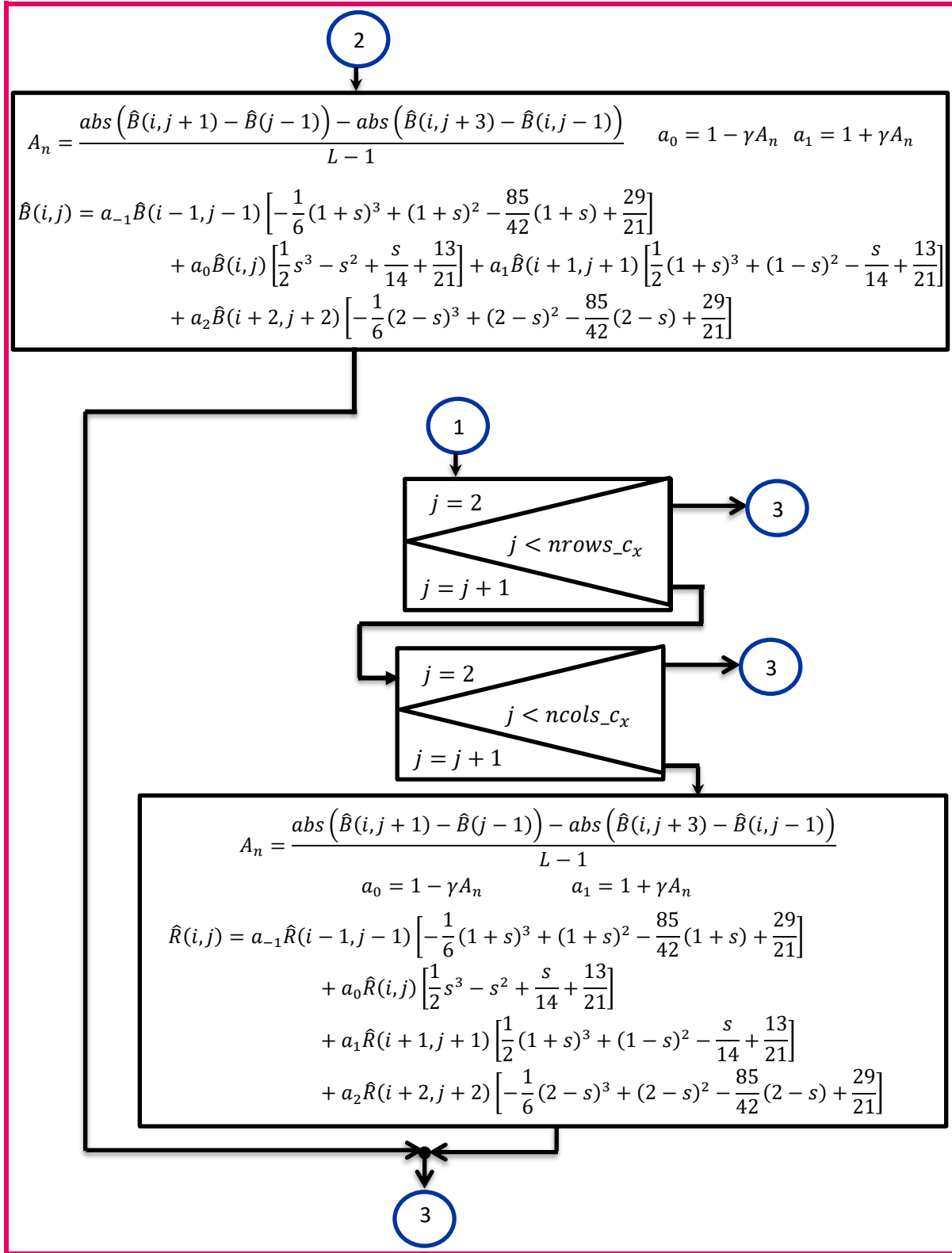


Figura 3.15. Diagramas de flujo de los procedimientos de inicialización e interpolación con distancia variable para las primeras dos filas de los planos G y B de una imagen a color.

La figura 3.16 resume el algoritmo de entrenamiento de la red neuronal para su aplicación a la interpolación polinomial.

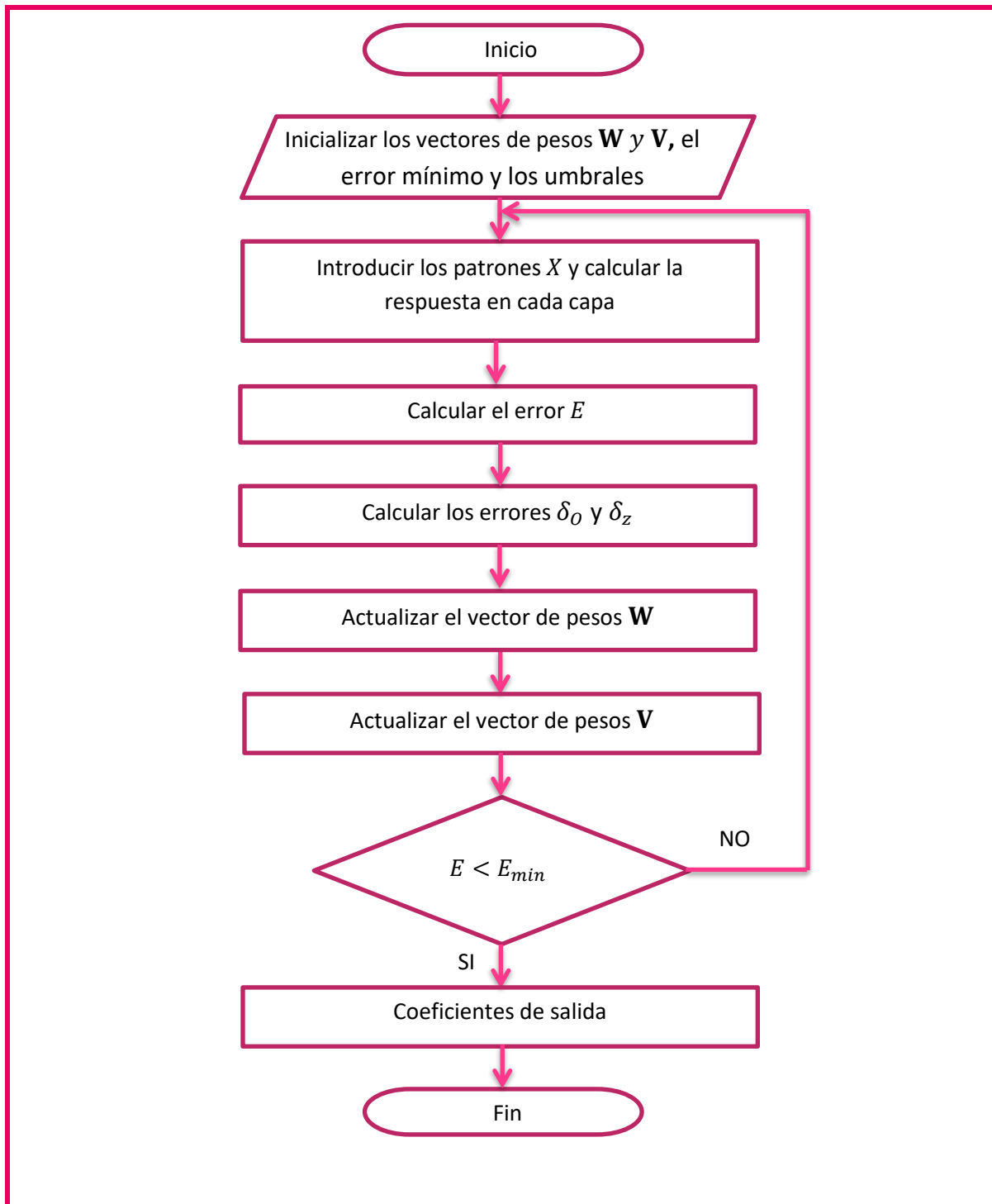


Figura 3.16 Diagrama de flujo con el procedimiento para el entrenamiento de la red neuronal

Capítulo

4

4. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos después de la ejecución de los algoritmos de interpolación descritos en los capítulos anteriores. Para ello, se eligieron cinco imágenes de prueba a color y en escala de grises. De acuerdo con los objetivos del proyecto de investigación, las imágenes están relacionadas con temas médicos y con fotografías aéreas, aunque en realidad los algoritmos funcionan para cualquier tipo de imágenes tanto a color o en escala de grises. Además de mostrar las imágenes interpoladas, se ofrece un concentrado con todos los resultados y las métricas de calidad aplicadas a las estimaciones de alta resolución.

4.1 Resultados esperados.

En contraste con el trabajo de tesis sobre superresolución desarrollado hace algunos años en la carrera de ISET de la UACM, en el cual se evaluaron los algoritmos aumentando 2:1 la resolución de las imágenes de prueba, en este caso todos los algoritmos se evalúan aumentando la resolución 4:1. Se espera que la adaptación de los algoritmos permita igualar o incluso mejorar los valores de PSNR y SSIM en comparación con el trabajo anterior.

4.2 Imágenes de prueba.

En las figuras de la 4.1 a la 4.5 se muestran las cinco imágenes que se utilizaron para evaluar los algoritmos de superresolución adaptiva y basada en redes neuronales. Para los fines de este trabajo, resulta conveniente asumir que la resolución de 512 x 512 píxeles de estas imágenes es suficiente como para considerarla la “alta resolución” de referencia a la cual se deben aproximar las versiones estimadas mediante los métodos de superresolución. Para que sea posible la estimación, las imágenes de prueba son convertidas a una versión de baja resolución de 128x128 píxeles, equivalente a una cuarta parte de su resolución original. Estas imágenes son entonces tomadas por los algoritmos de superresolución para evaluar su capacidad de estimación.



Figura 4.1: Imagen de referencia Fotogrametría_1.jpg de 512 x 512 píxeles y su equivalente en baja resolución 128x128 píxeles



Figura 4.2: Imagen de referencia Fotogrametría_2 de 512 x 512 píxeles y su equivalente en baja resolución 128x128 píxeles



Figura 4.3: Imagen de referencia Torax de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles

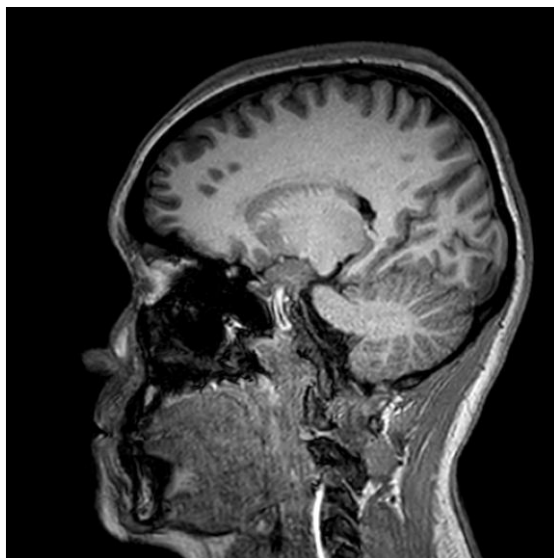


Figura 4.4: Imagen de referencia Tomografía de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles

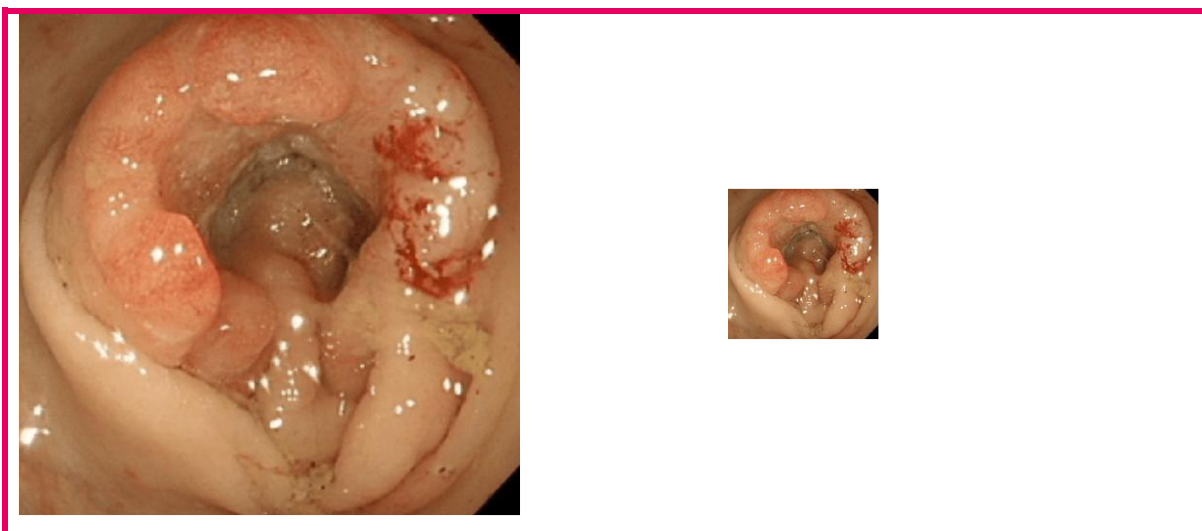
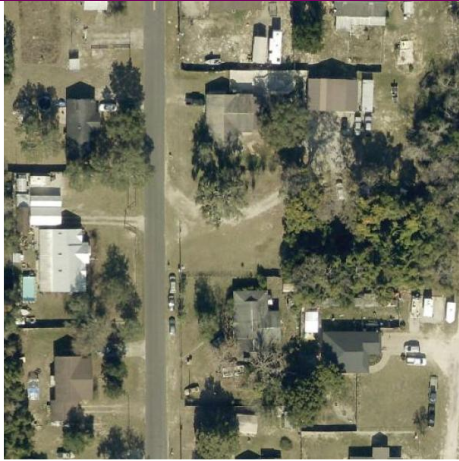


Figura 4.5: Imagen de referencia Endoscopia de 512 x 512 pixeles y su equivalente en baja resolución 128x128 pixeles

4.3 Resultados

En las figuras de la 4.6 a la 4.10 se muestran las imágenes estimadas mediante los métodos de interpolación descritos en los capítulos anteriores. En las figuras 4.6a, 4.7a, 4.8a, 4.9a y 4.10a, se muestran las imágenes de referencia de alta resolución. En las figuras 4.6b y c, 4.7b y c, 4.8b y c, 4.9b y c, 4.10b y c, se muestran las imágenes estimadas usando algoritmos adaptivos de distancia ponderada. En las figuras 4.6d y e, 4.7d y e, 4.8d y e, 4.9d y e, 4.10d y e, se muestran las imágenes estimadas usando algoritmos adaptivos de distancia deformada. Por último, en las figuras 4.6a, 4.7a, 4.8a, 4.9a y 4.10a, se muestran las imágenes estimadas usando el método adaptivo basado en una red neuronal de tres capas.



a) Imagen original



b) Interpolación bilineal con distancia ponderada



c) Interpolación bicúbica con distancia ponderada



d) Interpolación bilineal con distancia deformada



e) Interpolación bicúbica con distancia deformada



f) Interpolación usando red neuronal

Figura 4.6 Resultados de interpolación sobre imagen Fotogrametría_1.jpg.



a) Imagen original



b) Interpolación bilineal con distancia ponderada



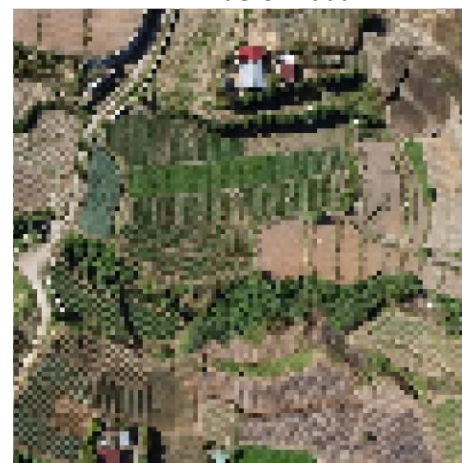
c) Interpolación bicúbica con distancia ponderada



d) Interpolación bilineal con distancia deformada



e) Interpolación bicúbica con distancia deformada

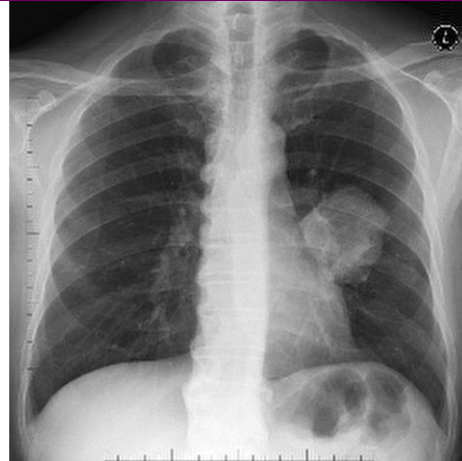


f) Interpolación usando red neuronal

Figura 4.7 Resultados de interpolación sobre imagen Fotogrametría_2.jpg.



a) Imagen original



b) Interpolación bilineal con distancia deformada



c) Interpolación bicúbica con distancia ponderada



d) Interpolación bilineal con distancia deformada

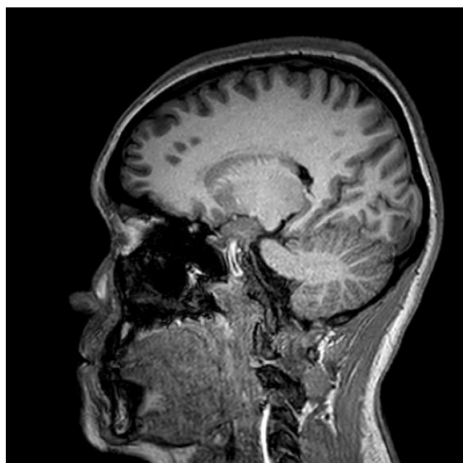


e) Interpolación bicúbica con distancia deformada

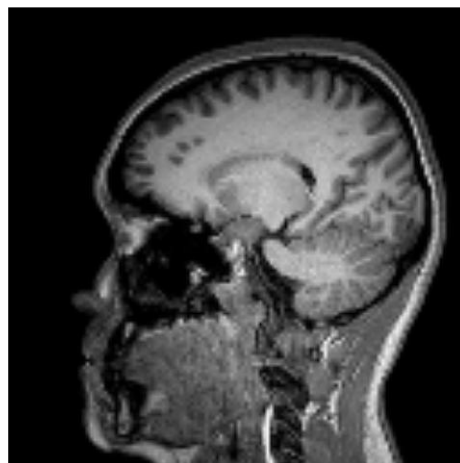


f) Interpolación usando red neuronal

Figura 4.8 Resultados de interpolación sobre imagen Torax.jpg.



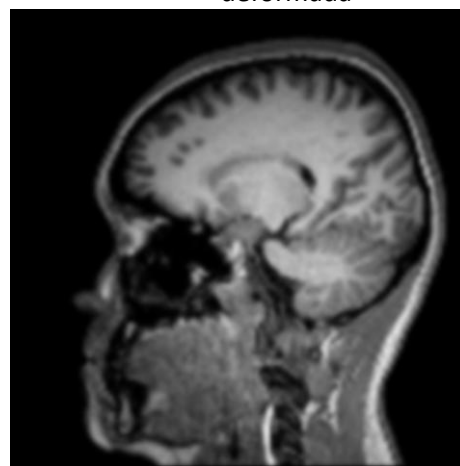
a) Imagen original



b) Interpolación bilineal con distancia deformada



c) Interpolación bicúbica con distancia ponderada



d) Interpolación bicúbica con distancia deformada

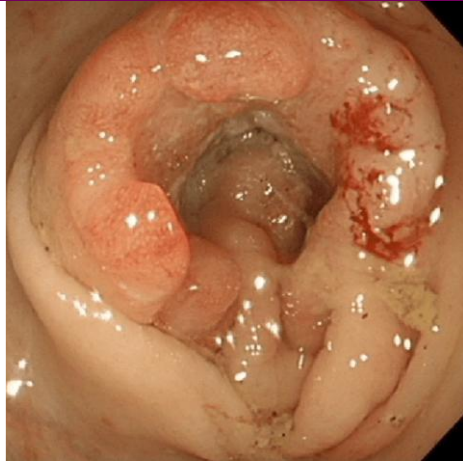


e) Interpolación bicúbica con distancia deformada



f) Interpolación usando red neuronal

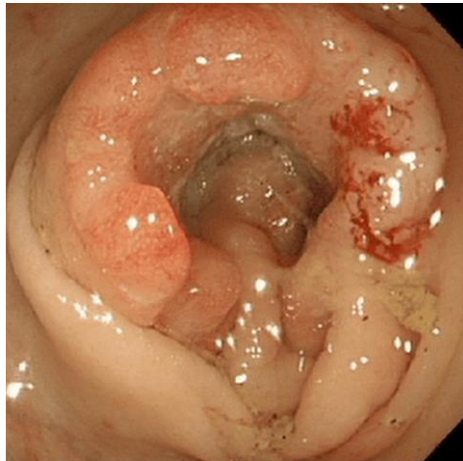
Figura 4.9 Resultados de interpolación sobre imagen Tomografía.jpg.



a) Imagen original



b) Interpolación bilineal con distancia deformada



c) Interpolación bicúbica con distancia ponderada



d) Interpolación bilineal con distancia deformada



e) Interpolación bicúbica con distancia deformada



f) Interpolación usando red neuronal

Figura 4.10 Resultados de interpolación sobre imagen Endoscopia.jpg.

A pesar de que el tamaño de las imágenes no corresponde con la dimensión real obtenida al ejecutar los programas en Matlab y esto dificulta tener una apreciación exacta de las estimaciones, los resultados permiten obtener algunas conclusiones:

1. A pesar de que la técnica de interpolación basada en distancia ponderada parece tener un mejor desempeño en lo general, cuando la imagen de baja resolución presenta una alta variación de tonos de grises o de color, todos los métodos presentan deficiencias en la estimación de alta resolución, lo que conduce a un efecto de pixelado en los bordes de la imagen. Esta primera conclusión es importante dado que las evidencias nos obligarían a descartar el uso de estas dos técnicas en aplicaciones de fotogrametría cuyas imágenes se caracterizan precisamente por la alta variación de tonalidades propias del terreno, vegetación, cultivos o infraestructura urbana. Sin embargo, en el caso esas técnicas muestran un desempeño superior cuando se aplican a imágenes biomédicas.
2. La interpolación basada en redes neuronales aparentemente muestra un desempeño inferior. No obstante, este método es el único que ofrece oportunidades de mejora al agregar más capas ocultas. En la medida que se agreguen capas adicionales el desempeño del método será mejor, con el costo de una mayor complejidad, mayor capacidad computacional o mayor tiempo de entrenamiento.

Estas conclusiones han sido elaboradas a partir de la apreciación visual sobre las imágenes obtenidas mediante los algoritmos, es decir, obedecen a un análisis subjetivo basado en la capacidad visual de la persona. A continuación, se presenta una tabla con los resultados completos para todos los algoritmos con sus métricas de calidad correspondientes, las cuales permiten realizar un análisis cualitativo basado en parámetros más precisos.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados de la PSNR y el SSIM para la imagen a color Fotogrametría_1.jpg la cual se presentó en la figura 4.1.

Tabla 4.1 Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 1.

Imagen	Método	PSNR	SSIM
Fotogrametría_1	Bilineal con distancia deformada	17.88	0.6032
	Bicúbica con distancia deformada	18.02	0.607
	O-MOMS Bicúbica con distancia deformada	18.00	0.6
	Bilineal con distancia ponderada	18.22	0.611
	Bicúbica con distancia ponderada	18.55	0.636
	O-MOMS Bicúbica con distancia ponderada	18.36	0.6211
	Red neuronal con interpolación bilineal	17.46	0.5983
	Red neuronal con interpolación bicúbica	17.44	0.6001
	Red neuronal con interpolación O-MOMS bicúbica	17.39	0.578
	Red neuronal con interpolación bilineal y bicúbica	17.48	0.5803
	Red neuronal con interpolación bicúbica y O-MOMS	17.38	0.578

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados de la PSNR y el SSIM para la imagen a color Fotogrametría_2.jpg la cual se presentó en la figura 4.2.

Tabla 4.2 Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 2

Imagen	Método	PSNR	SSIM
Fotogrametría_2	Bilineal con distancia deformada	17.55	0.533
	Bicúbica con distancia deformada	17.83	0.5421
	O-MOMS Bicúbica con distancia deformada	17.77	0.54
	Bilineal con distancia ponderada	17.79	0.532
	Bicúbica con distancia ponderada	17.83	0.54
	O-MOMS Bicúbica con distancia ponderada	17.60	0.5411
	Red neuronal con interpolación bilineal	17.08	0.528
	Red neuronal con interpolación bicúbica	17.12	0.53
	Red neuronal con interpolación O-MOMS bicúbica	17.80	0.54
	Red neuronal con interpolación bilineal y bicúbica	17.00	0.52
	Red neuronal con interpolación bicúbica y O-MOMS	17.01	0.516

En la Tabla 4.3 se muestran los resultados de la PSNR y el SSIM para la imagen en escala de grises Torax.jpg la cual se presentó en la figura 4.3.

Tabla 4.3 Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 3.

Imagen	Método	PSNR	SSIM
Fotogrametría_2	Bilineal con distancia deformada	27.88	0.826
	Bicúbica con distancia deformada	28.12	0.841
	O-MOMS Bicúbica con distancia deformada	28.04	0.839
	Bilineal con distancia ponderada	28.32	0.847
	Bicúbica con distancia ponderada	28.23	0.843
	O-MOMS Bicúbica con distancia ponderada	28.01	0.84
	Red neuronal con interpolación bilineal	25.08	0.716
	Red neuronal con interpolación bicúbica	25.82	0.73
	Red neuronal con interpolación O-MOMS bicúbica	24.99	0.701
	Red neuronal con interpolación bilineal y bicúbica	25.01	0.712
	Red neuronal con interpolación bicúbica y O-MOMS	24.87	0.7

En la Tabla 4.4 se muestran los resultados de la PSNR y el SSIM para la imagen en escala de grises Tomografía.jpg la cual se presentó en la figura 4.4.

Tabla 4.4 Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 4.

Imagen	Método	PSNR	SSIM
Fotogrametría_2	Bilineal con distancia deformada	27.68	0.831
	Bicúbica con distancia deformada	27.33	0.825
	O-MOMS Bicúbica con distancia deformada	27.12	0.829
	Bilineal con distancia ponderada	27.79	0.862
	Bicúbica con distancia ponderada	28.02	0.837
	O-MOMS Bicúbica con distancia ponderada	27.01	0.828
	Red neuronal con interpolación bilineal	26.37	0.812
	Red neuronal con interpolación bicúbica	27.01	0.832
	Red neuronal con interpolación O-MOMS bicúbica	26.81	0.821
	Red neuronal con interpolación bilineal y bicúbica	27.00	0.832
	Red neuronal con interpolación bicúbica y O-MOMS	26.40	0.817

En la Tabla 4.5 se muestran los resultados de la PSNR y el SSIM para la imagen a color Endoscopía.jpg la cual se presentó en la figura 4.5.

Tabla 4.5 Concentrado de valores PSNR y SSIM para la imagen de prueba 5.

Imagen	Método	PSNR	SSIM
Fotogrametría_2	Bilineal con distancia deformada	28.79	0.862
	Bicúbica con distancia deformada	29.23	0.875
	O-MOMS Bicúbica con distancia deformada	28.66	0.860
	Bilineal con distancia ponderada	29.5	0.879
	Bicúbica con distancia ponderada	29.30	0.876
	O-MOMS Bicúbica con distancia ponderada	29.15	0.875
	Red neuronal con interpolación bilineal	27.06	0.853
	Red neuronal con interpolación bicúbica	28.37	0.858
	Red neuronal con interpolación O-MOMS bicúbica	28.32	0.857
	Red neuronal con interpolación bilineal y bicúbica	28.70	0.862
	Red neuronal con interpolación bicúbica y O-MOMS	28.43	0.856

En el apartado de las conclusiones se presenta un análisis más detallado sobre los resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos.

4.4 Conclusiones.

Para concluir el trabajo, es importante responder las preguntas que se plantearon en un principio. A partir de los resultados obtenidos, ahora se presenta la respuesta a cada una de ellas.

¿Cuál es la eficiencia máxima que puede lograrse mediante los métodos clásicos de interpolación polinomial? Después de varios experimentos, no es posible determinar un valor exacto para esta pregunta, ya que la eficiencia de cada algoritmo depende mucho de las características de la imagen. Se pudo observar que cuando existe una alta varianza en los píxeles y una alta presencia de bordes, como en el caso de las imágenes de fotogrametría, todas las técnicas de interpolación tienden a un bajo desempeño, con valores de PSNR de 17 y SSIM de hasta 0.5. Por otra parte, cuando se trata de imágenes en escala de grises o imágenes a color con menor varianza, se obtienen valores cercanos a 30 para el PSNR y 0.8 para el SSIM.

¿Es posible mejorar la eficiencia de estos métodos aplicando técnicas adaptivas? De acuerdo con todos los experimentos, la diferencia de desempeño entre una técnica y otra sólo se puede apreciar cuando se usa una interpolación de 1:2, sin embargo, cuando se aumenta la resolución 1:4 el desempeño de los métodos parece ser más uniforme, quedando su desempeño en relación con las características de varianza de cada imagen en particular.

¿Es posible mejorar la eficiencia de los métodos aplicando una red neuronal simple? En principio, debido a que se utilizó una red con una sola capa oculta, los resultados obtenidos no mostraron gran mejoría con relación a las demás técnicas. Sin embargo, existe evidencia en otros trabajos de que al aumentar el número de capas ocultas el desempeño de las redes crece notablemente. Debido a limitaciones en la capacidad de cómputo, no fue posible experimentar con redes de mayor complejidad.

¿Tiene algún impacto sobre la eficiencia el aplicar los métodos fila por fila o columna por columna? La respuesta a esta pregunta es negativa. En realidad el orden sobre el cual se ordenan lexicográficamente los vectores sobre los cuales se aplican los métodos polinomiales no tiene ningún impacto sobre la eficiencia, ya que, como se comentó anteriormente, esta depende de la varianza y distribución de los colores, la cual no cambia significativamente por el orden en el cual se organizan los píxeles en los vectores.

4.5 Trabajo a futuro

La continuación del trabajo se orientará a la aplicación de redes neuronales más complejas, ya que de acuerdo con los resultados obtenidos, los métodos polinomiales no ofrecen la eficiencia suficiente para procesar imágenes de fotogrametría. Será en futuros trabajos donde se aplique técnicas más complejas basadas en aprendizaje profundo y/o redes adversariales para lograr los índices de calidad necesarios para su aplicación práctica.

REFERENCIAS

- [1] Abd El-Samie, Fathi E. Image Super-Resolution and Applications. CRC Press. London, UK. 2013
- [2] ArÃndiga, F., Donat, R., & Mulet, P. (2003). Adaptive interpolation of images. Signal Processing, 83(2), 459-464. [http://dx.doi.org/10.1016/s0165-1684\(02\)00445-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0165-1684(02)00445-0)
- [3] Bannore, V. Iterative Interpolation Super-Resolution Image Reconstruction. CRC Press Ne York. 2009
- [4] N. Plazziac. Image Interpolation using Neural Networks. IEEE Transactions on Image Processing. Vol. 8. Págs. 1647-1651.
- [5] D. Darian y T.W. Parks. 2004. Adaptively Quadratic Image Interpolation, IEEE Trans on Image Processing. Vol. 13. Págs. 690–698.
- [6] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden. 1993. B-Spline Signal Processing. I: Theory, IEEE Trans on Signal Processing. Vol. 41, Págs. 821–833.
- [7] P. Thevenaz, T. Blu and M. Unser. 2000. Interpolation Revisited, *IEEE Trans on Medical Imaging*. Vol. 19. Págs. 739–758.
- [8] T. Blu, B. Thevenaz and M. Unser. 2004. Linear Interpolation Revitalized, *IEEE Trans on Image Processing*. Vol. 13. Págs. 710–719.