

Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

UACM

Maestría en Dinámica no Lineal y Sistemas Complejos

*Formación de patrones por medio de generalizaciones de la
ecuación de Swift-Hohenberg*

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Dinámica no Lineal y Sistemas Complejos

Presenta

Gustavo Saulés Estrada

Director de tesis

Dr. Denis Pierre Boyer

México D. F. Mayo de 2009

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

Al Dr. Denis Pierre Boyer le agradezco su apoyo y dedicación en la dirección de esta tesis.

A los sinodales:

M. en C. José Luíz Gutiérrez Sánchez, M. en C. Jorge Fernando Camacho Pérez, Dr. Octavio Miramontes Vidal y Dr. Germinal Cocho Gil. Les agradezco el haber leído y comentado la tesis con tan poco tiempo.

También quiero agradecer a mi familia la paciencia que tuvieron durante todo el proceso. Su apoyo fue el motor que me permitió continuar.

Finalmente agradezco a la ENP de la UNAM la licencia que me permitió terminar estos estudios.

Para Marisela
¡Gracias por tu paciencia!

Índice general

1. Introducción	1
2. Aspectos generales en la formación de patrones	5
2.1. Convección de Rayleigh-Bénard	7
2.2. Patrones de Turing	8
2.3. Ondas de Faraday	11
2.4. Inestabilidades y bifurcaciones	13
2.5. Ecuaciones modelo	14
3. Ecuación de Swift-Hohenberg	19
3.1. Análisis lineal	20
3.2. Análisis débilmente no lineal	23
3.3. Ecuación de amplitud para la fase de bandas . . .	25
3.3.1. Análisis de estabilidad	29
3.4. Análisis energético	30
3.4.1. Análisis energético para bandas	32
3.5. Solución numérica	34
4. Ecuación de Swift-Hohenberg generalizada	37
4.1. Ecuación de amplitud para la fase hexagonal . . .	38
4.2. Análisis energético	43
4.2.1. Comparación entre el patrón de bandas y el hexagonal	44

4.3. Solución Numérica	45
5. Ecuación de SHG con dos modos	50
5.1. Patrón cuadrado	53
5.1.1. Ecuaciones de amplitud y energía	53
5.1.2. Comparación entre los patrones de bandas, cuadros y hexágonos	59
5.1.3. Solución numérica	60
5.2. Patrón de dodecágonos	63
5.2.1. Ecuaciones de amplitud y energía.	64
5.2.2. Comparación entre el patrón de bandas, el hexagonal y el dodecagonal	66
5.2.3. Solución Numérica	67
6. Ecuación de SHG con tres modos: patrones rectangulares	71
6.1. Patrón rectangular	73
6.1.1. Ecuaciones de amplitud y energía.	74
6.2. Resultados numéricos	80
7. Conclusiones y perspectivas	83
A. Vectores propios de un operador diferencial lineal	86
B. Alternativa de Fredholm	90
C. Ecuaciones de amplitud y energía para un patrón de dodecágonos	92
D. Método numérico	98
E. Programa en FORTRAN	102

Índice de figuras

1.1.	Diversos patrones: A)Piel de animales. B) Galaxia. C) Patrones generados en el laboratorio: convección de Rayleigh Bénard, ondas de Faraday, reacciones químicas y patrones por medios granulares. D)Copo de Nieve. E) Patrones de pasto. F) Arena del desierto. Tomados de [2]	2
2.1.	a) Diagrama del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard. b) Patrón de bandas observado desde arriba del sistema [2]	9
2.2.	Diferentes tipos de patrones de Turing en una reacción química CIMA, para detalles vea: [7].	10
2.3.	Diversos patrones de ondas de Faraday [4]: a) De bandas b) cuadrados c) pentágonos y d) dodecágonos	12
2.4.	Diagramas de bifurcación. A) Silla nodo. B) De tenedor supercrítica y C) De Hopf supercrítica. Las líneas continuas representan soluciones estables y las discontinuas, inestables.	14

ÍNDICE DE FIGURAS

2.5. Tres sistemas en los cuales se producen patrones de bandas y hexágonos. A) Patrones químicos de Turing. B) Patrón de descarga en un gas. C) Patrón de convección de Rayleigh-Bénard. Imagen tomada de [12].	16
3.1. Razón de crecimiento para distintos valores de ϵ	23
3.2. Diagrama de bifurcación para la amplitud, obtenida mediante un análisis débilmente no lineal. La línea continua indica estabilidad y la discontinua inestabilidad. Obsérvese que es supercrítica.	31
3.3. Funcional de energía para un patrón de bandas.	33
3.4. Resultados numéricos para la ecuación de Swift-Hohenberg con condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica (un patrón) de la ecuación, para el valor de ϵ correspondiente. El color negro corresponde a valores de $\psi > 0$ y el blanco a $\psi < 0$	35
3.5. Influencia del factor c en los patrones resultantes. Obsérvese que no se modifica la fenomenología del patrón.	36
4.1. Diagrama de los vectores que generan una fase hexagonal, nótese que entre cada par de ellos forman un ángulo de 120° . Los vectores punteados representan la dirección de los términos complejos conjugados.	39
4.2. Diagrama de bifurcación para la amplitud, de la fase hexagonal. Las líneas sólidas representan amplitudes estables y las discontinuas, inestables.	42
4.3. Funcional de energía para un patrón de hexágonos.	44

4.4.	Funcional de energía para un patrón de hexágonos y de bandas. Los hexágonos tienen menor energía cuando ϵ es pequeña, pero para $\epsilon = 1.91$ (la línea punteada) se produce la transición a bandas.	46
4.5.	Resultados numéricos para la ecuación de SHG con condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica (un patrón) para un valor fijo de ϵ). La línea punteada indica el valor de transición teórico.	48
4.6.	Patrón de transición entre hexágonos y bandas, para $\epsilon = 1.7$, con 200, 800 y 2000 iteraciones temporales.	48
4.7.	Resultados numéricos para la ecuación de SHG con condiciones iniciales no aleatorias. Es decir, iniciando con los patrones de la izquierda observamos que éstos se mantienen en el rango de la ϵ considerada.	49
5.1.	Razón de crecimiento para una solución de un patrón cuadrado, se puede observar que ahora son dos números de onda ($q_1 = 1, q_2 = q = \sqrt{2}$) los que inician la inestabilidad.	52
5.2.	Diagrama de los vectores que generan un patrón cuadrado. Obsérvese cómo la suma de dos vectores pequeños perpendiculares generan un vector grande y la de dos vectores perpendiculares grandes genera dos veces un vector pequeño.	54
5.3.	(A) Las tres soluciones de la ecuación (5.8). (B) La energía libre considerando las tres soluciones de la izquierda. La que utilizaremos será $F_{cuad} = F_3$	59

- 5.4. Graficas de la energía para los patrones de cuadros (curva sólida), bandas (curva punteada) y hexágonos (curva con puntos y rallas). A) $F_{cuad} < F_{hex} < F_{ban}$. B) $F_{cuad} < F_{hex} < F_{ban}$, hasta el punto de itersección (línea recta punteda) en $\epsilon = 0.76$, después se tiene $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$. C) $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$. D) $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$, hasta llegar al punto de intersección en $\epsilon = 1.91$, después se tiene $F_{ban} < F_{hex} < F_{cuad}$ 61
- 5.5. Resultados numéricos para la ecuación de SHG con dos modos. Obsérvese que se presentan los patrones previstos (cuadros, hexágonos y bandas) dentro de los rangos teóricos encontrados (líneas punteadas, $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$). Las condiciones iniciales fueron al azar. 62
- 5.6. Diagrama de los vectores que generan la fase dodecagonal. El ángulo entre cada dos vectores del mismo tipo es de $\pi/6$. Los vectores punteados representan complejos conjugados. 63
- 5.7. (A) Las dos soluciones de ecuación (5.14). (B) La energía libre considerando ambas soluciones de la izquierda. La que utilizaremos será $F_{dode} = F^+$. . . 66
- 5.8. Funcional de energía: A) Funcional de energía para los patrones de dodecágonos (curva sólida), bandas (curva punteada) y hexágonos (curva con puntos y rallas). B) Misma gráfica para valores pequeños de ϵ , puede apreciarse que la menor energía corresponde a los dodecágonos, hasta $\epsilon = 0,023$ 67

5.9. Resultados numéricos para la ecuación de SHG con dos modos, teniendo condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica, que corresponde al patrón resultante (el de arriba), las rectas punteadas indica los valores de transición teóricos: $\epsilon = 0.023$ y $\epsilon = 1.91$	69
5.10. Resultados numéricos para la ecuación SHG con dos modos con condiciones iniciales correspondientes a un patrón específico (el de la izquierda). Cada punto representa una solución numérica, obsérvese que tanto los hexágonos como las bandas son estables para toda ϵ , pero los dodecágonos únicamente lo son para pequeños valores.	70
6.1. Patrón rectangular que se obtiene de un arreglo cristalográfico cúbico.	72
6.2. Razón de crecimiento para la ecuación de SHG con tres modos: $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{3}$	73
6.3. a) Diagrama de los vectores en el espacio de Fourier que generan la fase rectangular. b) Planos de onda, en el espacio real, formando un patrón rectangular. Las direcciones de propagación son (k_1, k_2, m, l)	74
6.4. ‘Diagrama de fase’ obtenido por medio de un análisis de amplitud y energía, considerando patrones rectangulares, hexagonales y de bandas. Se muestran los intervalos de estabilidad con respecto a ϵ . Los valores de transición son: $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$	80

6.5. Resultados que se obtienen tomando un patrón de rectángulos y de cuadros (los de la izquierda) como condición inicial, se consideró $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{2}, q_3 = \sqrt{3}$. Obsérvese que ambos patrones son estables para toda ϵ indicada. Cada punto representa un resultado numérico. 81

6.6. Resultados numéricos que se obtienen considerando un patrón inicial al azar, con números de onda $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{5}, q_3 = \sqrt{6}$, cada punto es una solución numérica. Obsérvese que esta figura es similar a la 5.5, pero los cuadros se sustituyen por rectángulos. las líneas punteadas son los valores de transición obtenidos por medio del análisis energético. Los valores de transición son: $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$ 82

Capítulo 1

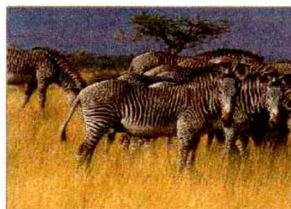
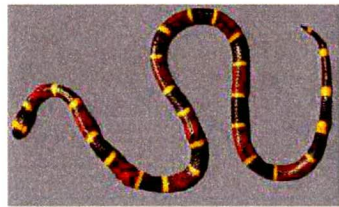
Introducción

La gran cantidad de patrones que se encuentran en la naturaleza ha atraído la atención de la humanidad desde tiempos inmemoriales. Se les puede observar en un amplio rango de escenarios naturales, tales como: formaciones estelares, granulación solar, formaciones nubosas, las dunas de las playas y desiertos, las pieles de los animales, descargas en gases, copos de nieve, colonias de bacterias, etc. En la figura 1.1 se encuentra una pequeña muestra de diversos patrones.

Una de las ecuaciones paradigmáticas para estudiar el proceso de formación de patrones periódicos con simetrías relativamente "sencillas", típicamente bandas y hexágonos, es la ecuación de Swift-Hohenberg [1].

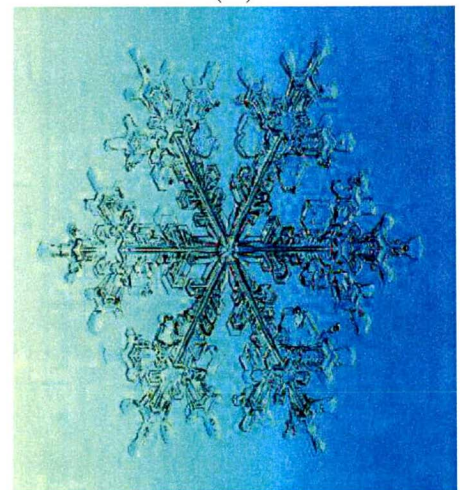
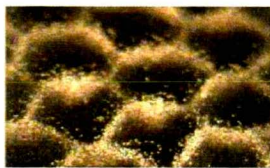
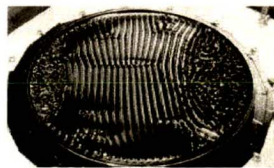
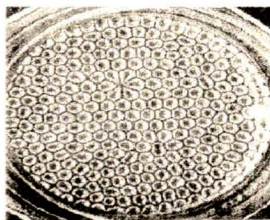
El objetivo principal de esta tesis es utilizar diversas generalizaciones de la ecuación de Swift-Hohenberg para estudiar patrones periódicos más 'complejos', los cuales también se observan en la naturaleza. En particular los patrones de simetría dodecagonal (a veces llamados cuasipatrones, por analogía con los cuasicristales), rectangular y cuadrada.

Una de las razones para estudiar este tipo de patrones es



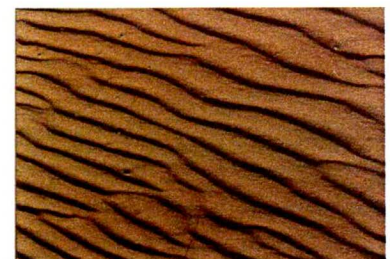
(A)

(B)



(C)

(D)



(E)

(F)

Figura 1.1: Diversos patrones: A) Piel de animales. B) Galaxia. C) Patrones generados en el laboratorio: convección de Rayleigh Bénard, ondas de Faraday, reacciones químicas y patrones por medios granulares. D) Copo de Nieve. E) Patrones de pasto. F) Arena del desierto. Tomados de [2]

que dentro del contexto de la materia condensada, aparecen una gran variedad de fases cristalinas con simetrías cuadradas y rectangulares (entre otras), por lo que quisiéramos contar con una herramienta teórica, que muestre una riqueza similar a la de formación de patrones no lineales.

En el segundo capítulo de esta tesis se presenta de forma general lo que se entiende por formación de patrones y cuales son los principales procesos que los generan. Se muestran algunos ejemplos, así como algunas de las herramientas para su estudio.

En el tercer capítulo se estudiará con detalle la ecuación de Swift-Hohenberg en dos dimensiones para el caso de un patrón de bandas; se deducirá la ecuación de amplitud y se realizará un análisis de tipo energético. Para propósitos de comparación, también se resolverá numéricamente.

En el cuarto capítulo se presenta una generalización conocida de la ecuación de Swift-Hohenberg con tal de poder obtener soluciones en forma de un patrón de hexágonos. Para realizar el análisis energético se deduce la ecuación de amplitud, pero ahora de una forma heurística. Finalmente se resuelve numéricamente y se compara con la solución de bandas, obteniéndose los intervalos de estabilidad de ambos patrones.

En el quinto capítulo se utiliza el modelo de Swift-Hohenberg generalizado con dos modos inestables (SHG con dos modos), el cual admite otro tipo de soluciones, tales como cuadrados, hexágonos asimétricos y sobre todo cuasipatrones, principalmente dodecágonos. Aplicando las técnicas de los dos capítulos anteriores se encuentran resultados originales para la energía de cuadrados y dodecágonos, y ésta última se compara con las soluciones de bandas y hexágonos, determinándose los intervalos

de estabilidad. Se contrastan los resultados con las soluciones numéricas.

Con el propósito de obtener patrones rectangulares estables, en el sexto capítulo se introduce un nuevo modelo de Swift-Hohenberg extendido a tres modos inestables (SHG con tres modos), en el cual los números de onda inestables son: $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{3}$ (o cualquier combinación de la forma q_1, q_2 y $q_3^2 = q_1^2 + q_2^2$). Hasta donde tenemos información, éste es el primer modelo de formación de patrones rectangulares que se ha propuesto. Se realiza el análisis equivalente de los capítulos anteriores y se compara con la solución de bandas y hexágonos.

En el séptimo capítulo se presentan las conclusiones y perspectivas que se pueden continuar con nuestro trabajo.

Capítulo 2

Aspectos generales en la formación de patrones

Además de admirar la belleza, que indudablemente presenta, la multitud de patrones que se forman en la naturaleza (ver la figura 1.1 para una pequeña muestra), los científicos han tratado de entender la dinámica de su formación. Se han dado cuenta que cuando, en un sistema, emerge espontáneamente un patrón, es generalmente porque se han cumplido diversas características; tales como [2]:

- Dinámica de conflictos entre procesos estabilizantes e inestabilizantes.

El conflicto entre diversos procesos, ya sean biológicos, químicos o físicos, es, por así decirlo, el motor de la formación de estructuras complejas. En general, cuando alguno de estos procesos domina, desaparece cualquier tipo de forma y lo que se tiene es un estado ya sea homogéneo o aleatorio; ambos sin estructura. Los patrones se encuentran en algún punto entre los extremos que representan a sistemas uniformes o muy desordenados.

Hay una gran variedad de procesos que compiten para formar dichas estructuras, por ejemplo: la difusión, reacciones químicas, fuerzas de fricción, la disipación térmica, la tensión superficial, gradientes de temperatura etc.

- Rompimiento de la simetría.

Cuando un objeto, un sistema, una ecuación, un fenómeno, etc. se mantiene invariante con respecto a un grupo de transformaciones específicas (reflexión, rotación, translación, etc.) esto es, a sus simetría de grupo, se dice que tiene simetrías.

Cuando se habla de simetría rota, no significa que la simetrías se hayan perdido por completo, sino que ahora el sistema (o lo que estemos considerando) tiene una simetría menor. En términos de teoría de grupos diríamos que la simetría de grupo inicial se rompe en uno de sus subgrupos.

El proceso de formación de patrones es consecuencia del rompimiento de la simetría, ya que éstos provienen de estados con mayor simetría, como por ejemplo de un estado uniforme; el cual es completamente simétrico. Generalmente se produce el rompimiento cuando algún parámetro explícito supera un valor crítico.

En un proceso típico el sistema se encuentra inicialmente en un estado homogéneo, pero cuando algún parámetro llega a un valor crítico, pierde estabilidad y surge el patrón. En cuyo caso las ecuaciones simétricas, que describen un estado simétrico admiten soluciones no simétricas ó con menos simetrías. A esto se le denomina rompimiento espontáneo de la simetría.

- Se encuentran fuera del equilibrio.

El equilibrio termodinámico es aquel en el que las variables termodinámicas de un sistema permanecen constantes en el tiempo y el espacio. En particular la entropía del sistema alcanzó un máximo y la energía libre un mínimo. Se dice que el sistema se encuentra en su estado más estable.

Por otro lado, en los sistemas fuera del equilibrio termodinámico puede haber flujo de materia o energía del exterior, por lo que se pueden generar estructuras donde la entropía no sea máxima, sino que aún disminuya. En muchos de éstos sistemas, es un parámetro de control externo el que hace que se encuentre fuera del equilibrio termodinámico.

Mostraremos a continuación, de forma general, tres ejemplos históricos de formación de patrones, donde se pueden apreciar claramente estas características [3], [4] y [5].

2.1. Convección de Rayleigh-Bénard

Es muy conocido el hecho de que cuando una capa de fluido es calentada constantemente desde la parte de abajo, la energía se transmite por conducción. Pero si la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior continúa aumentando, dicho mecanismo ya no es suficiente para transmitir la energía. Por lo que se produce la convección (ver la figura 2.1a). En este último proceso el fluido con más temperatura se expande y sube, debido a que disminuye su densidad; en la parte superior disminuye su temperatura, se contrae y baja, repitiéndose todo el proceso mientras se mantenga el flujo de calor externo.

Si el fluido es calentado, en la parte de abajo, uniformemente, toda la capa inferior tendrá la misma temperatura y tenderá a subir, mientras que toda la capa superior tenderá a bajar. Estas dos capas de fluidos no se pueden atravesar, por lo que el sistema es forzado a romper su simetría y generar celdas de convección (ahora llamadas de Bénard), en las cuales circula el fluido; produciéndose un patrón espacial que se mantiene, siempre que se mantenga fija la diferencia de temperaturas entre la parte superior e inferior.

En 1916 Lord Rayleigh se dio cuenta que los factores importantes que determinan cuándo se producen (o no) estos patrones de convección, es debido a una competencia entre las fuerzas de flotación que estabilizan el fluido (dependientes principalmente de la diferencia de temperaturas) y los fenómenos disipativos estabilizantes (dependientes principalmente de la viscosidad y difusión térmica del fluido).

Dependiendo del valor que tenga el cociente de los tiempos de relajación de los dos efectos, se pueden tener patrones de bandas, cuadrados hexágonos, etcétera. Por esta razón al fenómeno convectivo que se produce entre dos placas paralelas ahora se le denomina convección de Rayleigh-Bénard.

En la figura 2.1 se presenta un diagrama esquemático del fenómeno de convección y un patrón observado en el laboratorio. También puede verse la referencia [2] para más información y diversas variaciones del experimento de convección.

2.2. Patrones de Turing

En 1952 Alan Turing [6] publicó un artículo donde describía una hipotética reacción química en un sistema abierto, que podría,

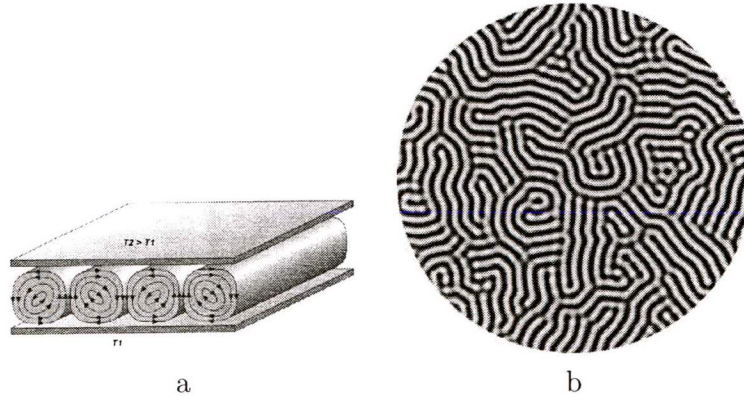


Figura 2.1: a) Diagrama del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard. b) Patrón de bandas observado desde arriba del sistema [2]

en una mezcla inicial uniforme de compuestos químicos, producir un rompimiento de simetría y generar patrones espaciales estables.

Turing consideró un proceso en el cual algún componente químico, digamos A , experimenta una reacción autocatalítica; generando más de sí mismo, de manera que la razón a la cual A se genera depende de la cantidad de A presente. Por otro lado, el compuesto A activa, de alguna forma, la formación de un compuesto B , el cual inhibe la formación de A .

El elemento clave para obtener patrones es hacer que A y B se difundan, a través del medio reactivo, con diferentes coeficientes de difusión, por lo que el rango efectivo de sus respectivas influencias serán diferentes. Si removemos los productos finales de la reacción y los sustituimos por nuevos reactantes, se puede mantener el patrón indefinidamente.

Todo este esquema representa un subgrupo de procesos de reacción-difusión, que se denomina: sistemas de activación-inhibición.

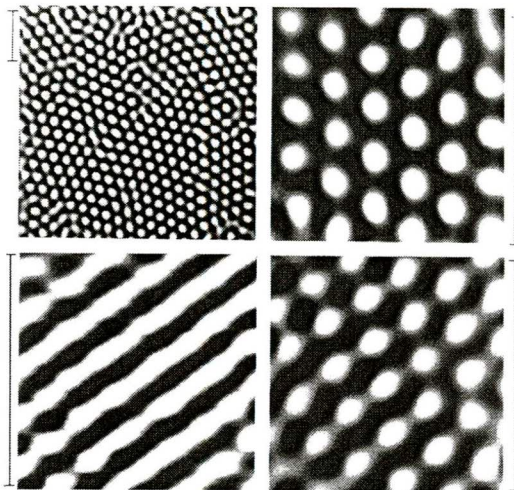


Figura 2.2: Diferentes tipos de patrones de Turing en una reacción química CIMA, para detalles vea: [7].

Obtener estas estructuras de Turing en el laboratorio constituyó un gran reto, fue hasta 1990 cuando el grupo de P. De Kepper [7] halló la manera de generarlos a partir de la reacción CIMA (‘chlorite-iodide-malonic-acid reaction’) en un reactor permanentemente alimentado con nuevos reactantes. Una de las claves para lograr su aparición fue que, a diferencia de los medios acuosos que se habían empleado anteriormente, las reacciones se llevaron a cabo en un gel cargado de moléculas de almidón. Mediante esta reacción lograron reproducir patrones estacionarios de bandas y hexágonos.

En la figura 2.2 se presentan algunos de los patrones que se obtienen por este mecanismo, y en la referencia [8] hay información sobre nuevas reacciones y aplicaciones, sobre todo en el estudio de la generación de patrones de color en la piel de animales.

2.3. Ondas de Faraday

Casi setenta años antes de de los experimentos de convección térmica de Bénard, se realizó lo que podemos considerar el primer experimento sobre formación de patrones. Este fue realizado por Michael Faraday [9] en 1831.

Mediante un sencillo diseño, Faraday puso a vibrar verticalmente un recipiente con un fluido y encontró que para diversas frecuencias se forman patrones de ondas estacionarias en la superficie del líquido. Él encontró que la frecuencia de vibración del líquido en el recipiente es la mitad de la vibración impuesta al contenedor. Sin embargo en 1868, Matthiessen obtuvo en su experimento que las vibraciones del líquido eran sincrotónicas con las del recipiente. Esta discrepancia fue resuelta hasta 1954 cuando se realizó un análisis por medio de la ecuación de Mathieu encontrando que la capa de líquido se vuelve inestable (pierde la simetría) cuando la frecuencia la vibración es un múltiplo entero de la mitad de la frecuencia natural de la vibración del líquido. Por lo tanto, lo que Faraday y Rayleigh observaron fue una resonancia subarmónica y Matthiessen una resonancia sincrotónica.

En otras palabras: cuando aplicamos una fuerza vertical oscilatoria a un fluido, si la aceleración es baja, el fluido sólo subirá y bajará, pero si la aceleración producida por esta fuerza aumenta y excede un cierto umbral, se produce una inestabilidad (paramétrica) que genera que la superficie plana rompa su simetría y se generen ondas estacionarias.

Modificando la frecuencia de forzamiento, la amplitud, la viscosidad del fluido y en un contenedor lo suficientemente amplio, para evitar los efectos de frontera, se pueden encontrar, una gran cantidad de patrones estacionarios.

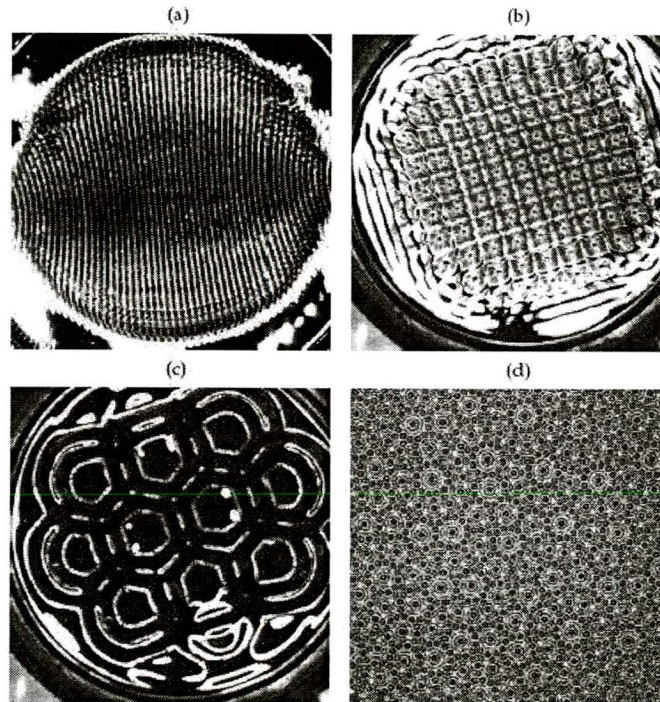


Figura 2.3: Diversos patrones de ondas de Faraday [4]: a) De bandas b) cuadrados c) pentágonos y d) dodecágonos .

En la figura 2.3 se pueden observar diversos patrones de Faraday.

Dos clases muy importante de patrones (en particular para esta tesis) que se forman mediante este mecanismo son los patrones cuadrados (figura 2.3b) y los denominados cuasipatrones, por ejemplo los dodecágonos (figura 2.3d).

El modelo de multifrecuencias [10], usado en esta tesis reproduce adecuadamente muchos de estos patrones.

2.4. Inestabilidades y bifurcaciones

Como ya mencionamos, en el proceso de formación de patrones de un sistema, es fundamental identificar cuando algún parámetro de control cruza un umbral crítico, generando una inestabilidad. Ésta hace que cambie la estabilidad global del sistema y se rompan algunas simetrías generando, de esta forma, un patrón.

En el caso de los patrones de Turing, dicha inestabilidad se denomina inestabilidad difusiva o de Turing, para la convección de Rayleigh se tiene la inestabilidad convectiva y para las ondas de Faraday, la inestabilidad paramétrica.

Una clase importante de inestabilidades globales son las bifurcaciones, las cuales se pueden interpretar, matemáticamente hablando, como un cambio en la topología del espacio fase del sistema. La bifurcación se produce cuando el parámetro de control (que llamaremos ϵ de ahora en adelante) supera un valor crítico ($\epsilon_c = 0$, para los ejemplos siguientes) y se produce un rompimiento espontáneo de la simetría.

Hay muchos tipos de bifurcaciones, por ejemplo la de ‘silla-nodo’, la de Hopf y la de ‘tenedor’ son las más comunes.

Considerando una variable A real, la cual describiría el estado asintótico de un sistema dado, en la figura 2.4A se presenta el diagrama de bifurcación para una ‘silla-nodo’, en la cual aparecen además de la solución inicial simétrica ($A = 0$) dos soluciones estacionarias, una estable y otra inestable. También se muestra en la figura 2.4B una bifurcación de ‘tenedor’ supercrítica, donde una solución trivial ($A = 0$) pierde su estabilidad y aparecen, para $\epsilon > 0$ otros dos estados estacionarios. Y finalmente en 2.4C se ejemplifica la bifurcación de Hopf supercrítica, donde una solución estable se convierte en un ciclo

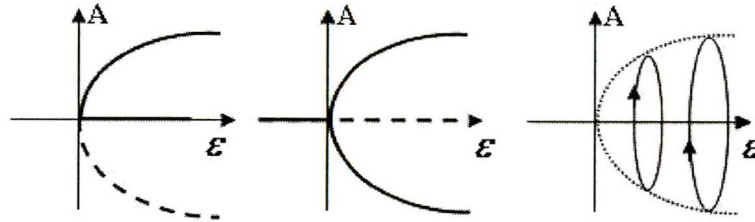


Figura 2.4: Diagramas de bifurcación. A) Silla nodo. B) De tenedor supercrítica y C) De Hopf supercrítica. Las líneas continuas representan soluciones estables y las discontinuas, inestables.

límite ($A = A(t)$, con $A(t)$ una función periódica).

Para un análisis más general sobre bifurcaciones se puede ver por ejemplo el libro de Guckenheimer and Holmes [11].

Muchas de las bifurcaciones que forman patrones son supercríticas, y se pueden observar en patrones de Turing, en la convección y en ondas de Faraday. Es importante insistir que esto no es una regla, hay algunos sistema que forman patrones por medio de bifurcaciones subcríticas, tal es el caso de la coexistencia entre patrones convectivos concéntricos y de espiral [3] o como veremos más adelante, de hexágonos y estados uniformes.

2.5. Ecuaciones modelo

Quizás uno de los aspectos más fascinantes de la formación de patrones es que fenomenológicamente se generan el mismo tipo de patrones en muchos sistemas diferentes. Sin importar que se trate de un sistema físico, químico ó biológico, se encuentra que tienen formas y dinámica muy similares.

En la figura 2.5 se muestran tres diferentes sistemas, en los cuales se producen los mismos tipos de patrones: de bandas y

hexágonos. El primero es un sistema donde se produce la reacción química que da lugar a patrones de Turing. También se muestran dos patrones de descargas en gases y ,finalmente, los patrones que se producen en la convección de Rayleigh-Bénard.

Es importante aclarar que cuando se dice que tienen una dinámica similar, nos referimos a la dinámica cerca del umbral de la inestabilidad. En otras palabras, lo que decimos es que aún cuando los mecanismos de las inestabilidades son peculiares para cada sistema, su dinámica es similar. Por lo tanto una descripción apropiada será determinada principalmente por las simetrías del problema y la naturaleza de la bifurcación (ó bifurcaciones, ya que pueden ser varias) que se genere.

Gracias a esta generidad se ha propuesto un conjunto de ecuaciones modelo que no son tan complejas como las ecuaciones físicas completas de un sistema en particular, pero cubren los perfiles generales y, sobre todo, la universalidad de muchos sistemas que forman patrones.

Se puede revisar el artículo de Cross y Hohenberg [13] y las referencias que ahí se señalan, para una discusión detallada de estas ecuaciones.

A continuación se dará un breve resumen de algunas de estas ecuaciones:

- Ecuación de Ginsburg-Landau compleja:

$$\partial_t A = \epsilon A + (1 + i\alpha)\partial_{xx}^2 A - (1 + i\beta)3|A|^2 A. \quad (2.1)$$

Es ésta una ecuación genérica para la amplitud (A) de una modulación (o patrón), se utiliza en sistemas espacialmente extendidos que presentan una bifurcación de Hopf.

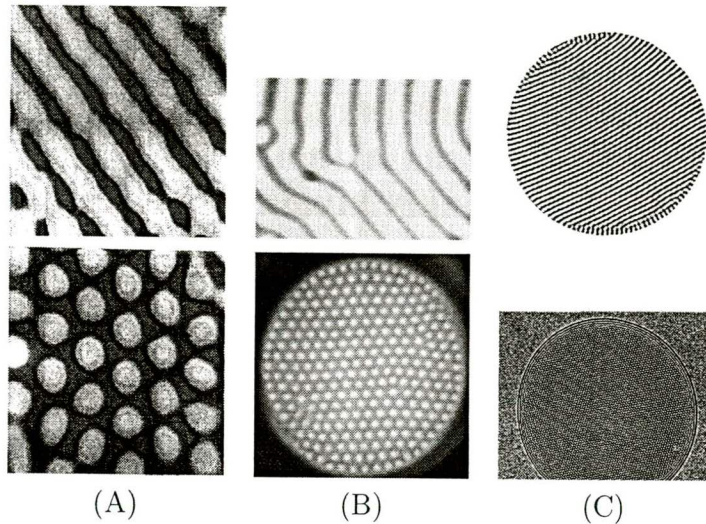


Figura 2.5: Tres sistemas en los cuales se producen patrones de bandas y hexágonos. A) Patrones químicos de Turing. B) Patrón de descarga en un gas. C) Patrón de convección de Rayleigh-Bénard. Imagen tomada de [12].

Es de gran interés debido a su generidad y se ha vuelto el paradigma para estudiar transiciones a caos espacio-temporal. Tiene amplias aplicaciones en diversos sistemas físicos, químicos y biológicos; tales como: óptica no lineal, dinámica de poblaciones de bacterias, condensación de Bose-Einstein, superconductividad, etcétera.

- Ecuación de Swift-Hohenberg:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (q_c^2 + \partial_x^2)^2 \psi - \psi^3. \quad (2.2)$$

Donde $\psi(\mathbf{x}, t)$ es un campo real. Que podría ser, en el caso de la convección de Bénard, la velocidad vertical con respecto al plano medio.

Debido a la complejidad de utilizar la ecuación de Navier-Stokes para estudiar patrones en fluidos, en particular los

que se producen en la convección de Rayleigh-Bénard, se buscó una ecuación que capturara los perfiles básicos y fuera más fácil de resolver. Así es como nació esta ecuación. Actualmente se le utiliza ampliamente, no sólo en fenómenos convectivos.

Una de sus características es que presenta bifurcación de tipo tenedor, como veremos en el análisis más detallado del siguiente capítulo.

El trabajo principal de esta tesis se basa en esta ecuación.

- Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky:

$$\partial_t \psi = -\epsilon \psi - \partial_x^2 \psi - \partial_x^4 \psi - \psi \partial_x \psi. \quad (2.3)$$

Ésta es una de las más simples ecuaciones diferenciales parciales no lineales que exhibe caos espaciotemporal. En 1976 Kuramoto dedujo esta ecuación y la utilizó, en una dimensión espacial, para el estudio de la fase turbulenta que se manifiesta en la reacción de Belusov-Zhabotinsky. En forma independiente Sivashinsky la obtuvo en el contexto de frentes laminares.

Considerando diversas geometrías y variando las condiciones de frontera, se ha obtenido una gran cantidad de inestabilidades dinámicas que producen diferentes patrones. Su estudio sigue siendo motivo de amplias investigaciones.

- Ecuaciones de Reacción-Difusión

$$\begin{aligned} \partial_t u &= D_u u + F(u, v) \\ \partial_t v &= D_v v + G(u, v) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde: $F(u, v)$, $G(u, v)$ son dos funciones que representan la cinética de la reacción del sistema en consideración, D_u , D_v son los coeficientes de difusión.

Así como las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen el modelo estándar para estudiar los fluidos clásicos, las ecuaciones de reacción-difusión caracterizan la dinámica espacio-temporal de un sistema en el cual las moléculas experimentan transformaciones químicas y están sujetas a un movimiento térmico. Se pueden producir muchos regímenes dinámicos, e incluso caos espacio-temporal, dependiendo de F y G .

Esta ecuación es muy general, tiene una gran cantidad de aplicaciones, se le utiliza para modelar fenómenos tales como: conducción de pulsos eléctricos en los nervios, reacciones químicas oscilantes, morfogénesis, sistemas presa-depredador,... etc.

A diferencia de la de Swift-Hohenberg y Ginsburg-Landau real (con $\alpha = \beta = 0$ en la ecuación 2.1), esta ecuación no se puede obtener a partir de un funcional de Liapunov F .

Capítulo 3

Ecuación de Swift-Hohenberg

Como ya se mencionó en la introducción, la ecuación modelo de Swift-Hohenberg nació para poder estudiar de forma más simple diversos fenómenos de formación de patrones que se producen en los fluidos, en particular en el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard. En la siguiente sección mostraremos cómo un sencillo análisis lineal, indicará la posibilidad de que se produzcan patrones periódicos.

Sin embargo para poder tener más información sobre el tipo de patrón que se genere, como por ejemplo su amplitud, se requerirá un análisis más detallado, el cual se hará más adelante.

La ecuación de Swift-Hohenberg para ψ , un campo real, está dada por:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (q_c^2 + \nabla^2)^2 \psi - \psi^3. \quad (3.1)$$

Algunas propiedades generales de en esta ecuación son:

- Es invariante bajo translaciones:

Si se sustituye x por $x + a$, la ecuación no se altera, debido a que el operador tiene coeficientes constantes.

- Es invariante bajo reflexiones:

Si sustituyo x por $-x$ tampoco se altera, ya que no hay derivadas espaciales impares.

- Es invariante ante rotaciones:

El operador ∇^2 es invariante con respecto a las rotaciones.

- Se puede obtener a partir de una funcional de Liapunov:

$$\partial_t \psi = -\frac{\delta F}{\delta \psi} \quad (3.2)$$

Donde δ representa la derivada funcional de Fréchet.

En una dimensión, F esta dada por:

$$F[\psi] = \frac{1}{2} \int \left\{ [\partial_x^2 + q_c]^2 \psi^2 - \epsilon \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 \right\} dx. \quad (3.3)$$

Más adelante se dará una interpretación física de esta propiedad.

3.1. Análisis lineal

Sin pérdida de generalidad consideraremos la ecuación de Swift-Hohenberg en una dimensión:

$$\partial_t \psi(x, t) = \epsilon \psi(x, t) - (q_c^2 + \partial_x^2)^2 \psi(x, t) - \psi^3(x, t) \quad (3.4)$$

Una solución estacionaria y uniforme (solución ‘trivial’) es:

- $\psi_0 = 0$.

¿Qué podemos decir de su estabilidad?

Para responder lo anterior lo que haremos es perturbar la solución base (ψ_0) y observar cómo evoluciona.

Considérese la perturbación:

$$\delta\psi = \psi - \psi_0$$

Es importante tener en cuenta que esta perturbación debe ser solución de la ecuación de Swift-Hohenberg, de hecho sería una solución particular.

Sustituyendo en la ecuación (3.4) , se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta\psi &= \epsilon(\psi_0 + \delta\psi) - (q_c^2 + \partial_x)^2(\psi_0 + \delta\psi) - (\psi_0 + \delta\psi)^3 \\ &= \epsilon\psi_0 - (q_c^2 + \partial_x)^2\psi_0 - \psi_0^3 + \epsilon\delta\psi - (q_c^2 + \partial_x)^2\delta\psi \\ &\quad - 3\psi_0^2\delta\psi + \mathcal{O}((\delta\psi)^2) \\ &\approx (\epsilon - (q_c^2 + \partial_x)^2) - 3\psi_0)\delta\psi = \mathcal{J}[\delta\psi] \end{aligned}$$

Donde sólo se han considerado perturbaciones ‘pequeñas’ (de primer orden).

En particular, para la solución $\psi_0 = 0$, queda:

$$\partial_t \delta\psi = (\epsilon - (q_c^2 + \partial_x)^2)\delta\psi. \quad (3.5)$$

Obsérvese que finalmente lo que se ha despreciado es el término ψ^3 .

Como el Jacobiano \mathcal{J} es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, sus funciones propias son modos de Fourier (ver el apéndice A), y por lo tanto la solución particular de la ecuación diferencial parcial linealizada (3.5) es:

$$\delta\psi = A_q(0)e^{\sigma_q t} e^{iqx}. \quad (3.6)$$

Con $\sigma_q = \epsilon - (q_c^2 - q^2)^2$, denominada razón de crecimiento.

De donde deducimos que:

- Si $\epsilon < 0$, $\sigma_q < 0 \quad \forall q \Rightarrow \psi_0 = 0$ es estable ante todas las perturbaciones pequeñas ($\delta\psi(t, x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$).
- Si $\epsilon > 0$, $\sigma_q > 0$, para algunos q_s cercanos a $q_c \Rightarrow \psi_0 = 0$ es inestable.

Por lo tanto las inestabilidades con número de onda finito (cercanos a $q = q_c$) propician la aparición de patrones periódicos cuando $\epsilon < 0$.

Si se grafica la razón de crecimiento σ_q con respecto al número de onda q , para diferentes valores de ϵ (ver la figura 3.1), encontramos que cuando $\epsilon < 0$, todos los modos se estabilizan ($\sigma_q < 0$, $e^{\sigma_q t} \rightarrow 0$) y el sistema se vuelve homogéneo, sin estructura ($\psi \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$).

Para $\epsilon = 0$, no todos los modos son estables, hay un modo que tiene estabilidad neutra. Pero para $0 < \epsilon < 1$, aparece toda una banda de modos inestables alrededor de un número de onda crítico q_c :

$$\sqrt{q_c^2 - \sqrt{\epsilon}} < q < \sqrt{q_c^2 + \sqrt{\epsilon}}$$

Estos modos crecen exponencialmente y se saturan a tiempos largos, debido al término estabilizante $-\psi^3$, generando la formación de patrones estacionarios con número onda crítico igual o cercano a q_c .

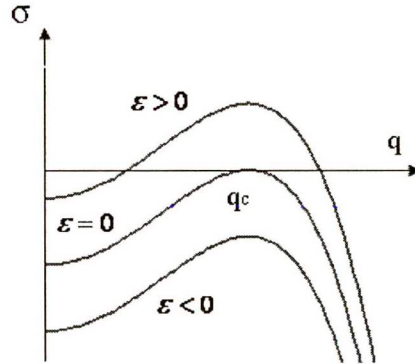


Figura 3.1: Razón de crecimiento para distintos valores de ϵ .

Como se puede ver, este análisis predice la formación de soluciones espacialmente moduladas (patrones), pero no va más allá; para poder responder más preguntas, es necesario hacer un análisis no lineal.

3.2. Análisis débilmente no lineal

Un procedimiento común en el análisis teórico de sistemas que forman patrones es reducir la dimensión del sistema, diferenciando para ello los modos dinámicamente activos: los que crecen ó están en estado neutro, de los pasivos, los cuales decaen rápidamente.

Esta separación nos muestra que la dinámica cerca del umbral de la inestabilidad (donde se produce la bifurcación) es dominada principalmente por los modos activos; debido a que tienen una evolución lenta en el tiempo, mientras que los modos pasivos, decaen rápidamente.

Cuando el sistema es espacialmente extendido, el comportamiento de los modos activos se puede estudiar considerando sus amplitudes, que son como envolventes de las variaciones rápidas del patrón. La dinámica (lenta) de estas envolventes es determinada por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales conocidas como ecuaciones de amplitud, siendo pioneros en su investigación Newell y Whitehead [14].¹

Las ecuaciones de amplitud se han vuelto una importante herramienta en el estudio de formación de patrones fuera del equilibrio y se han aplicado, exitosamente, en una gran cantidad de sistemas en diversas áreas de investigación [4].

Uno de los métodos para obtener las ecuaciones de amplitud es por medio de la teoría débilmente no lineal, la cual consiste, en este caso, en suponer que la solución estacionaria de la ecuación de Swift-Hohenberg, está formada por el producto de una amplitud y una función periódica:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} + \overline{A_n} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.7)$$

Donde $|\mathbf{k}_n| = q_c$ y N indica la simetría del patrón. Si $N = 1$ tenemos bandas, para $N = 2$ (y $\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2$) cuadrados, para $N = 3$ (y $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$) hexágonos, etc. La barra arriba de A_n indica que es el complejo conjugado (recuérdese que ψ es real).

Suponemos también que podemos expandir la solución como una serie de potencias del parámetro $|\epsilon - \epsilon_c|$, de tal forma que al sustituir en la ecuación (3.1), tendremos una jerarquía de ecuaciones, equivalentes a la ecuación original, las cuales describen la evolución espacio temporal de la solución.

¹Para más detalles puede ver [3].

3.3. Ecuación de amplitud para la fase de bandas

Sin perder generalidad consideraremos la ecuación de Swift-Hohenberg en dos dimensiones:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (q_c^2 + \nabla^2)^2 \psi - \psi^3. \quad (3.8)$$

Supóngase que tenemos soluciones que forman un patrón de bandas, orientadas a lo largo del eje y :

$$\psi = A(X, Y, T)e^{iq_c x} + \bar{A}(X, Y, T)e^{-iq_c x}. \quad (3.9)$$

Donde X, Y, T son las variables ‘lentas’, las cuales únicamente aparecen en las amplitudes.

Para ver como están relacionadas éstas variables lentas con las rápidas (x, y, t) , recordemos que en la figura 3.1, del análisis lineal, encontramos que sólo números de onda en una banda centrada en q_c y de ancho $\approx \sqrt{\epsilon}$ crecen. Por lo que dada la relación $\sigma_q = \epsilon - (q_c^2 - q^2)^2$, la relación entre las variables lentas y rápidas esta dada por ²:

$$X = \epsilon^{1/2}x, \quad Y = \epsilon^{1/4}y, \quad T = \epsilon t.$$

Usando la regla de la cadena para derivar las variables lentas, encontramos:

$$\partial_t \rightarrow \epsilon \partial_T, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon^{1/2} \partial_X \quad \partial_y \rightarrow \partial_y + \epsilon^{1/4} \partial_Y$$

²Un análisis completo se encuentra en:[3]

De donde:

$$\begin{aligned}
 (q_c^2 + \nabla^2)^2 &\rightarrow (\partial_x^2 + q_c^2 + 2\epsilon^{1/2}\partial_x\partial_X + \epsilon\partial_X^2 + \epsilon^{1/2}\partial_Y^2)^2 \\
 &= L^2 + \epsilon^{1/2}(4\partial_x\partial_X + 2\partial_Y^2)L \\
 &+ \epsilon \{2L\partial_x^2 + (2\partial_x\partial_X + \partial_Y^2)^2\} \\
 &+ \epsilon^{3/2} \{4\partial_x\partial_X^3 + 2\partial_x^2\partial_X^2\}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Por conveniencia se ha sustituido $L \equiv \partial_x^2 + q_c^2$

Si ahora proponemos que la solución de (3.8) se puede expandir como una serie de potencias de $\epsilon^{1/2}$:

$$\psi = \epsilon^{1/2}\psi_{1/2} + \epsilon^1\psi_1 + \epsilon^{3/2}\psi_{3/2} + \epsilon^2\psi_2 + \dots$$

Si se sustituye esta expansión y el operador (3.10) en la ecuación (3.8), lo que tenemos es la ecuación de Swift-Hohenberg desglosada en un conjunto de ecuaciones jerárquicas de diversos ordenes de $\epsilon^{1/2}$:

- Para el orden más bajo, $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$:

$$\mathcal{L}_c\psi_{1/2} = 0. \tag{3.11}$$

Como el operador lineal $\mathcal{L}_c = (q_c^2 + \partial_x)^2$ solo actúa sobre las variables rápidas, la solución más simple que se tiene es:

$$\psi_{1/2} = A_0(X, Y, T)e^{iq_c x} + \bar{A}_0(X, Y, T)e^{-iq_c x} \tag{3.12}$$

Esta ecuación justifica la elección de la solución inicial propuesta (3.9).

- Para el orden $\mathcal{O}(\epsilon^1)$

$$\mathcal{L}_c\psi_1 = -(4\partial_x\partial_X + 2\partial_Y^2)L\psi_{1/2} \tag{3.13}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
 L\psi_{1/2} &= (\partial_x^2 + q_c^2)[A_0(X, T)e^{iq_c x} + \bar{A}_0(X, T)e^{-iq_c x}] \\
 &= A_0(X, Y, T)(q_c^2 - q_c^2)e^{iq_c x} + \bar{A}_0(X, Y, T)(q_c^2 - q_c^2)e^{-iq_c x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\mathcal{L}_c \psi_1 = 0 \quad (3.14)$$

Esta ecuación para ψ_1 es la misma que para $\psi_{1/2}$, por lo que podemos elegir como solución $\psi_1 = 0$.

Ahora veamos qué sucede en el siguiente orden:

- Para el orden $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_c \psi_{3/2} &= -(\partial_T - 1)\psi_{1/2}(4\partial_x \partial_X + 2\partial_Y)L\psi_1 \\
 &\quad - (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2)^2 \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3 \\
 &= [1 - \partial_T - (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2)^2] \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3 \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_c \psi_{3/2} = \mathcal{L} \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3. \quad (3.16)$$

Donde: $\mathcal{L}_c = (q_c^2 + \partial_x^2)$ y $\mathcal{L} = 1 - \partial_T - (2iq_c \partial_X + \partial_Y^2)^2$ son operadores lineales.

La ecuación (3.16) tendrá solución para $\psi_{3/2}$, siempre y cuando se cumpla:

$$\int_x^{x+\lambda_0} [\mathcal{L} \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3] e^{-iq_c x'} dx' = 0, \quad (3.17)$$

con $\lambda_0 = 2\pi/q_c$.

A la relación anterior se le denomina: condición de solubilidad de Fredholm (ver apéndice B), y lo que significa es que el lado derecho de (3.16) no puede oscilar como $e^{\pm iq_c x}$, debido a que éstas son soluciones de $\mathcal{L}_c(\psi) = 0$. Si no se cumpliera, significaría que tendríamos soluciones resonantes ($\psi = \infty$).

Utilizando la solución que encontramos para $\psi_{1/2}$ (3.12), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\psi_{1/2}e^{-iq_c x'} &= \mathcal{L}A_{1/2} + \mathcal{L}\bar{A}_{1/2}e^{-2iq_c x} \\ \psi_{1/2}^3 e^{-iq_c x} &= A_{1/2}^3 e^{2iq_c x} + \bar{A}_{1/2}^3 e^{-4iq_c x} + 3|A_{1/2}|^2 A_{1/2} \\ &\quad + 3|A_{1/2}|^2 \bar{A}_{1/2} e^{-2iq_c x}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral (3.17):

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\lambda_0} [(\mathcal{L} - 3|A_{1/2}|^2)A_{1/2} + (\mathcal{L} - 3|A_{1/2}|^2)\bar{A}_{1/2}e^{-2iq_c x'} \\ - A_{1/2}^3 e^{2iq_c x'} - \bar{A}_{1/2}^3 e^{-4iq_c x'}] dx' = 0.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Como las amplitudes $A_{1/2}$ y $\bar{A}_{1/2}$ sólo dependen de las variables lentas y no de x' , los términos que tengan un factor oscilante $e^{miq_c x}$, con m entero, en (3.18) se integran a cero (se les denomina no resonantes). Para que se satisfaga la igualdad en la ecuación anterior, los términos que quedan, llamados resonantes, se tienen que anular:

$$(\mathcal{L} - 3|A_{1/2}|^2)A_{1/2} = 0$$

Esto nos da la ecuación para la amplitud que queremos:

$$\partial_T A_{1/2} = A_{1/2} - (2iq_c \partial_X + \partial_Y^2)^2 A_{1/2} - 3|A_{1/2}|^2 A_{1/2}.\quad (3.19)$$

Regresando a las variables originales:

$$\begin{aligned} T &= t\epsilon \\ X &= x\sqrt{\epsilon} \\ Y &= y\epsilon^{\frac{1}{4}} \\ A(x, t) &= \sqrt{\epsilon}A_{1/2} + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

Se tiene finalmente:

$$\partial_t A = \epsilon A + \left(\partial_x - \frac{i}{2q_c} \partial_y^2 \right)^2 A - 3|A|^2 A. \quad (3.20)$$

Esta ecuación es del tipo Ginzburg-Landau, y fue obtenida por primera vez por Newell-Whitehead [14] y Segel [15].

3.3.1. Análisis de estabilidad

Las soluciones uniformes y estacionarias de la ecuación (3.20) se obtienen haciendo: $\partial_t = \partial_x = \partial_y = 0$, quedando:

$$\epsilon A - 3|A|^2 A = 0$$

De donde se obtienen:

- $A_0 = 0, \forall \epsilon$ y $|A_0| = \sqrt{\epsilon/3}$, si $\epsilon > 0$

Estas soluciones corresponden a un estado homogéneo y a un patrón de bandas con amplitud $\sqrt{\epsilon/3}$ y frecuencia q_c . Ambos estados parecen coexistir, pero para $\epsilon > 0$ la solución $\psi = 0$ es inestable. Por lo tanto el sistema seleccionará el patrón de bandas.

Esta última afirmación la podemos comprobar por medio de un análisis de estabilidad de la ecuación (3.20), para lo cual perturbamos la solución estacionaria no lineal con una perturbación uniforme $\delta A(t)$ y observamos cómo evoluciona:

Sea $A(t) = A_0 + \delta A(t)$, con $|\delta A(t)| \ll 1$, sustituyendo en (3.20) encontramos (a primer orden en δA):

$$\begin{aligned} \partial_t \delta A &= \epsilon(A_0 + \delta A) - 3(A_0 + \delta A)^3 \\ &\approx \epsilon \delta A - 9A_0^2 \delta A + \dots \\ &= \delta A(\epsilon - 9A_0^2) \end{aligned}$$

De donde: $\delta A = ce^{(\epsilon - 9A_0^2)t}$, con c una constante.

Por lo tanto, para $\epsilon > 0$:

- $A_0 = 0$, se tiene que $\delta A = ce^{\epsilon t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que es inestable.
- $A_0 = \sqrt{\epsilon/3}$ se tiene que $\delta A = ce^{-2\epsilon t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que es estable.

Lo anterior se resume en un diagrama de bifurcación para la amplitud, (ver la figura 3.2), en la cual se tiene una bifurcación supercrítica, que manifiesta la presencia del patrón de bandas estable.

3.4. Análisis energético

En los sistemas que forman patrones no podemos, en general, definir una energía libre cuyo valor mínimo determinaría la solución a tiempos grandes. Sin embargo, para la ecuación de Swift-Hohenberg podemos encontrar una funcional de Lyapunov

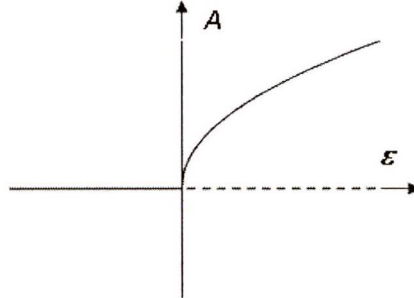


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación para la amplitud, obtenida mediante un análisis débilmente no lineal. La línea continua indica estabilidad y la discontinua inestabilidad. Obsérvese que es supercrítica.

F que se comporta como una energía libre, esto es: F no crece cuando el sistema evoluciona y la dinámica del sistema tiende a llevar a las soluciones hacia un mínimo de F .

Para ser más específicos, anteriormente se señaló que:

$$\partial_t \psi = -\frac{\delta F}{\delta \psi}, \quad (3.21)$$

con

$$F[\psi] = \frac{1}{2} \int \left\{ [\partial_x^2 + q_c]^2 \psi^2 - \epsilon \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 \right\} dx$$

La evolución de F es decreciente ya que:

$$\frac{dF}{dt} = \int \frac{\delta F}{\delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx = - \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0. \quad (3.22)$$

Obtener la evolución temporal de ψ a partir de la funcional de Lyapunov es una tarea complicada, pero lo importante es que tendremos un patrón estacionario en cada mínimo del funcional de energía, los cuales podrían ser cualitativamente diferentes;

esto es, algunos podrían ser periódicos, otros cuasiperiódicos, etc.

Esta misma propiedad se extiende a la ecuación de amplitud (3.20):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta \bar{A}}, \quad (3.23)$$

Ahora con $F = F(A, \bar{A})$, donde A y \bar{A} se pueden considerar variables independientes:

$$F = \int dx dy \left[-\epsilon |A|^2 + 3/2 |A|^4 - \left| \left(\partial_x - \frac{i}{2q_c} \partial_y^2 \right) A \right|^2 \right]. \quad (3.24)$$

Es importante volver a mencionar que el que exista esta función de energía no es la regla, sino un caso particular.

3.4.1. Análisis energético para bandas

En la sección anterior mostramos que la solución general de un patrón de bandas es (3.9), en la cual la amplitud que nos proporciona la solución estacionaria y uniforme se obtiene de (3.20), y está dada por:

$$\epsilon A - 3|A|^2 A = 0 \quad (3.25)$$

De donde, sin tomar en cuenta la solución trivial, se obtiene:

$$|A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \quad (3.26)$$

Esta solución corresponde a un patrón perfectamente ordenado ($\partial_x A = \partial_y A = 0$). En cuyo caso la ecuación para la energía (3.24) se reduce a:

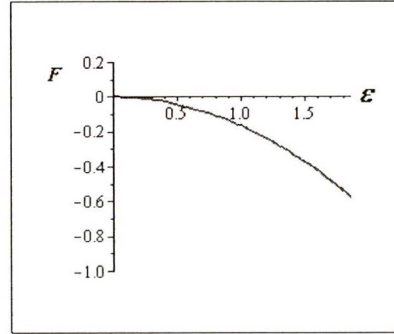


Figura 3.3: Funcional de energía para un patrón de bandas.

$$F = \epsilon|A|^2 + \frac{3}{2}|A|^4. \quad (3.27)$$

Donde ahora F representa una energía por unidad de área.

Observa que se sigue cumpliendo la ecuación (3.23):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial \bar{A}} &= -\frac{\partial F}{\partial \bar{A}} \left\{ -\epsilon A \bar{A} + \frac{3}{2}(A \bar{A})^2 \right\} \\ &= \epsilon A - 3(A \bar{A})A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

Sustituyendo la solución no trivial estacionaria y uniforme $|A| = \sqrt{\epsilon/3}$ en (3.27), obtenemos la energía libre por unidad de área correspondiente a un patrón de bandas:

$$F = -\frac{\epsilon^2}{6}. \quad (3.28)$$

En la figura 3.3 se grafica esta relación, ahí podemos ver que la energía disminuye cuando ϵ aumenta.

3.5. Solución numérica

En esta sección resolveremos de forma numérica la ecuación de Swift-Hohenberg en dos dimensiones, con condiciones iniciales aleatorias y de frontera periódicas. Para ello utilizaremos una técnica pseudo-espectral y de tipo ‘predictor-corrector’, desarrollada por Cross et al. en 1997 [16].

Con este propósito se discretizó el espacio en una malla de 256×256 puntos, con paso espacial (dx) de 0.5 y temporal $dt =$ de 0.1, el número de onda crítico fue de $q_c = 1$. En el apéndice D se muestra la deducción del algoritmo y en E, el programa en FORTRAN utilizado.

En cada corrida típicamente se realizaron de 1000 a 5000 iteraciones temporales. El tiempo de máquina, en una Pentium 3, fue de entre 2 y 8 minutos.

En la figura 3.4 se presentan los resultados de la solución numérica para la ecuación de Swift-Hohenberg, cada punto representa el patrón resultante (solución de la ecuación) con respecto a un valor de ϵ . Como puede observarse, lo que se obtiene es un patrón de bandas para los valores de $\epsilon > 0$ considerados aquí.

Nótese que en algunos casos las bandas no son rectas, esto no modifica las conclusiones, ya que siguen siendo bandas, pero es importante señalar que para el método numérico se consideró la ecuación de Swift-Hohenberg con un factor c , como lo propusieron Lifshitz y Petrich en 1997 [10]:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - c(q_c^2 + \nabla^2)^2 \psi - \psi^3. \quad (3.29)$$

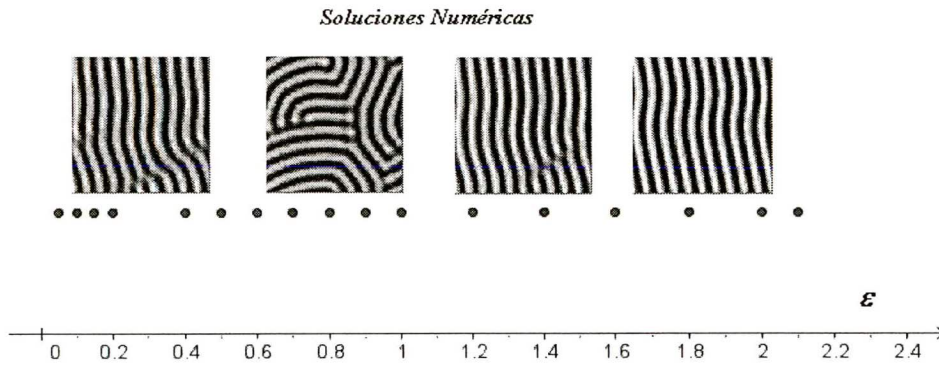


Figura 3.4: Resultados numéricos para la ecuación de Swift-Hohenberg con condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica (un patrón) de la ecuación, para el valor de ϵ correspondiente. El color negro corresponde a valores de $\psi > 0$ y el blanco a $\psi < 0$.

Un factor c grande hace que se eliminen muchos modos inestables, quedando unos pocos cercanos a q_c . Por lo que el patrón final se obtiene más rápido (en menos iteraciones alcanza un estado de equilibrio) y es más ‘limpio’. Será importante considerar esto, sobre todo cuando ϵ sea grande y, como se verá en los siguientes capítulos, cuando tengamos varios modos críticos.

En la figura 3.5 se muestra el efecto de dicho factor c , obsérvese que se siguen obteniendo bandas, no se modifica la fenomenología del patrón.

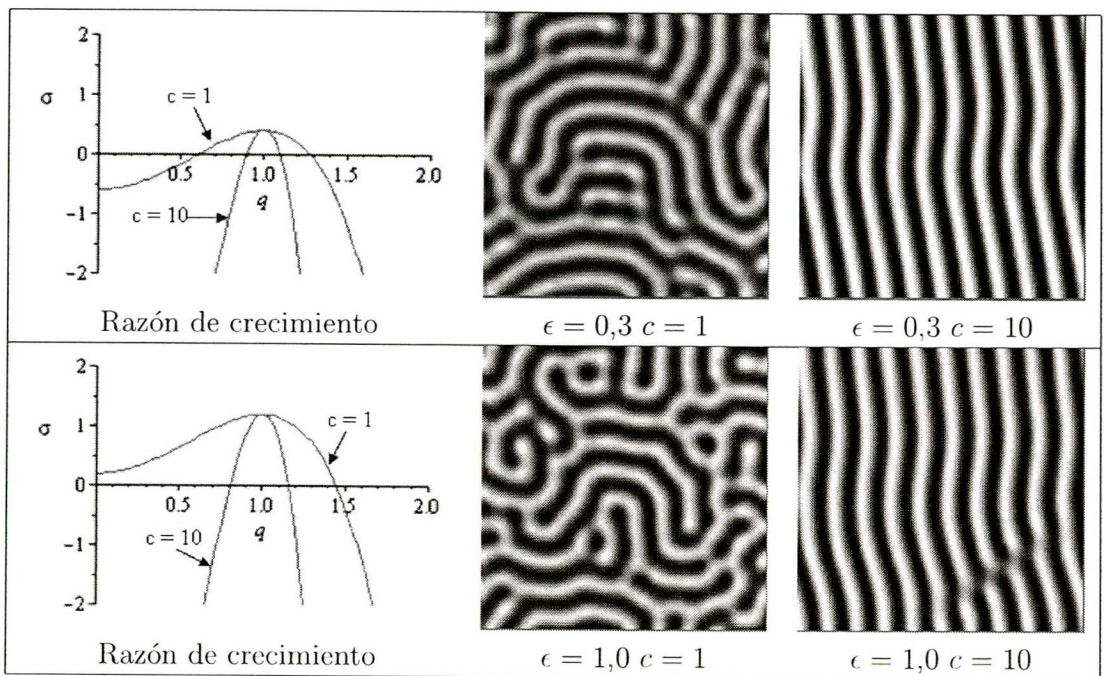


Figura 3.5: Influencia del factor c en los patrones resultantes. Obsérvese que no se modifica la fenomenología del patrón.

Capítulo 4

Ecuación de Swift-Hohenberg generalizada

Como mencionamos en la introducción de esta tesis, en la convección de Rayleigh-Bénard no solamente se observan patrones de bandas, sino que bajo ciertas condiciones se obtienen patrones hexagonales. La ecuación de Swift-Hohenberg (3.4) admite este tipo de soluciones, y combinaciones de ellas (cuadrados, hexágonos, etcétera.), pero son inestables (ver [3]); las bandas son las únicas estables.

Por esta razón, para que el modelo de Swift-Hohenberg pueda tener más soluciones estables, se le tienen que adicionar más términos no lineales en ψ y en sus derivadas.

El término más simple que podemos agregarle y que produciría soluciones hexagonales (por ejemplo) es: $g\psi^2$ con $g > 0$, por lo que la ecuación queda:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (q_c^2 + \nabla^2)^2 \psi + g\psi^2 - \psi^3. \quad (4.1)$$

Es común nombrar a esta ecuación como: ecuación de Swift-Hohenberg Generalizada (ecuación de SHG).

4.1. Ecuación de amplitud para la fase hexagonal

Para obtener las ecuaciones de amplitud que reflejan estas soluciones, utilizaremos un análisis heurístico, el método formal es semejante al presentado en la sección 3.3, y se puede encontrar en la referencia [5].

Supongamos que la solución de la ecuación de SHG es un patrón de hexágonos:

$$\psi = A_1 e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x}} + A_2 e^{i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{x}} + A_3 e^{i\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{x}} + C.C. \quad (4.2)$$

Con $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$, y $C.C.$ representa el complejo conjugado.

En la figura 4.1 se muestran las tres direcciones de las ondas planas que generan el entramado hexagonal; nótese que la coordenada x_i está alineada con \mathbf{q}_i , y la coordenada y_i tiene dirección perpendicular. Los vectores punteados representan las direcciones de los términos complejos conjugados.

Si sustituimos (4.2) en (4.1), se multiplicarán las amplitudes debido a los términos no lineales. Es decir, se sumarán las \mathbf{q}_i .

Obsérvese en la figura 4.1 que los vectores \mathbf{q}_i se pueden obtener de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= -\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_2 &= -\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_3 &= -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \end{aligned}$$

Además de las identidades:

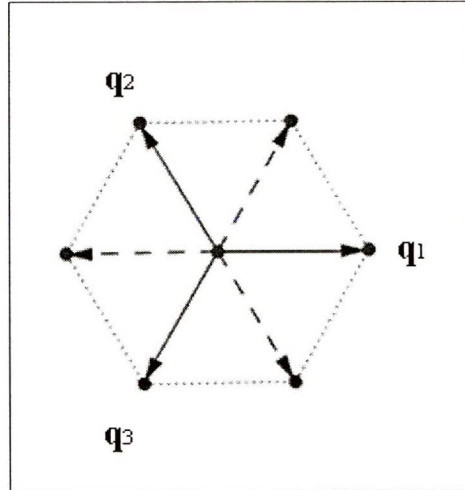


Figura 4.1: Diagrama de los vectores que generan una fase hexagonal, nótese que entre cada par de ellos forman un ángulo de 120° . Los vectores punteados representan la dirección de los términos complejos conjugados.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Recordando que para cualquier suma: $\sum_j a_j$:

$$\left(\sum_j a_j\right)^2 = \sum_j a_j^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j \quad (4.3)$$

$$\left(\sum_j a_j\right)^3 = \sum_j a_j^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + 6 \sum_{i \neq j \neq h} a_i a_j a_h \quad (4.4)$$

Entonces, basados en el análisis débilmente no lineal del capítulo anterior se tiene que las ecuaciones de amplitud se obtendrán al considerar solamente los términos resonantes correspondientes a cada vector de onda; es decir, para obtener la ecuación de

A_j solo consideramos aquellos términos que son proporcionales a $e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}}$:

Por ejemplo, considerando sólo los términos resonantes para A_1 , se tiene que:

- El término ψ^2 genera: $2g\bar{A}_2\bar{A}_3$
- El término ψ^3 genera: $3A_1\bar{A}_1\bar{A}_1$, $6A_1A_2\bar{A}_2$, $6A_1A_3\bar{A}_3$

Por lo tanto, la ecuación para la amplitud A_1 es:

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 &= \epsilon A_1 + 2g\bar{A}_2\bar{A}_3 + \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 A_1 \\ &\quad - (3|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|A_3|^2) A_1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De forma semejante se obtienen las ecuaciones de amplitud para A_2 y A_3 , quedando:

$$\begin{aligned} \partial_t A_2 &= \epsilon A_2 + 2g\bar{A}_1\bar{A}_3 + \left(\partial_{x_2} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_2}^2 \right)^2 A_2 \\ &\quad - (3|A_2|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_3|^2) A_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t A_3 &= \epsilon A_3 + 2g\bar{A}_1\bar{A}_2 + \left(\partial_{x_3} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_3}^2 \right)^2 A_3 \\ &\quad - (3|A_3|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2) A_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es importante mencionar que tomando el complejo conjugado de estas ecuaciones, tendríamos las otras tres ecuaciones para las amplitudes conjugadas.

Las soluciones estacionarias y uniformes ($\partial_t A_i = 0, \partial_x A_i = \partial_y A_i = 0$) se obtienen del sistema:

$$\begin{aligned}
 \epsilon A_1 + 2g\bar{A}_2\bar{A}_3 - (3|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|A_3|^2) A_1 &= 0 \\
 \epsilon A_2 + 2g\bar{A}_1\bar{A}_3 - (3|A_2|^2 + 6|A_3|^2 + 6|A_1|^2) A_2 &= 0 \quad (4.8) \\
 \epsilon A_3 + 2g\bar{A}_1\bar{A}_2 - (3|A_3|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2) A_3 &= 0
 \end{aligned}$$

De donde:

- Si $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, tendremos un estado uniforme.
- Si $A_1 \neq 0$ y $A_{i \neq 1} = 0$, tendremos un patrón de bandas en la dirección \mathbf{q}_1 . El patrón de bandas es también una solución.
- Si $A_1 = A_2 = A_3 = A_0$ tendremos un patrón hexagonal (ver figura 4.1).

Veamos este último caso:

Considerando $A_1 = A_2 = A_3 = A_0$, el sistema de ecuaciones (4.8) se reduce a:

$$\epsilon A_0 + 2g\bar{A}_0^2 - 15|A_0|^2 A_0 = 0 \quad (4.9)$$

El cual tienen tres soluciones:

La primera corresponde al estado uniforme.

$$A_0 = 0 \quad (4.10)$$

Las otras dos soluciones, considerando A_0 real, corresponden a patrones hexagonales con diferentes amplitudes:

$$\begin{aligned}
 A_0^{(+)} &= \frac{g + \sqrt{g^2 + 15\epsilon}}{15} \\
 A_0^{(-)} &= \frac{g - \sqrt{g^2 + 15\epsilon}}{15} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

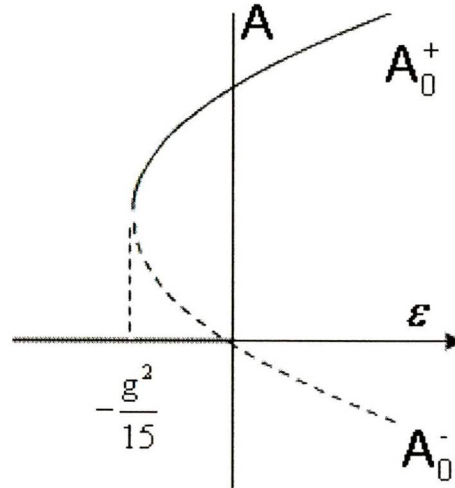


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación para la amplitud, de la fase hexagonal. Las líneas sólidas representan amplitudes estables y las discontinuas, inestables.

En la figura 4.2 se presenta, tomado de [5], el diagrama de bifurcación simplificado, ahí se puede apreciar que cuando las soluciones (4.11) existen ($\epsilon > \frac{-g^2}{15} = \epsilon_1$) geoméricamente representan las ramas de una parábola en el plano (ϵ, A) , con vértice en: $(-\frac{g^2}{15}, \frac{g}{15})$. Obsérvese también que para valores de ϵ no muy grandes las amplitudes $A_0^{(+)}$ y $A_0^{(-)}$ son estables e inestables respectivamente. Además, como ϵ_1 es negativo los hexágonos pueden coexistir con la base uniforme ($A_0 = 0$) en el intervalo $[\epsilon_1, 0]$.

Como una primera conclusión, a partir de este análisis, podemos decir que el término que generaliza $(g\psi^2)$ la ecuación de Swift-Hohenberg, permite combinar los diversos modos de tal forma que estabilizan el patrón hexagonal.

4.2. Análisis energético

Por otro lado, como ya se mencionó, las ecuaciones para las amplitudes también se pueden escribir derivando una funcional de energía, que en este caso esta dada por:

$$\begin{aligned}
 F_{hex} &= -\epsilon A_1 \bar{A}_1 - \epsilon A_2 \bar{A}_2 - \epsilon A_3 \bar{A}_3 - 2g A_2 A_3 A_1 - 2g \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_1 \\
 &+ \frac{3}{2} (A_1 \bar{A}_1)^2 + \frac{3}{2} (A_2 \bar{A}_2)^2 + \frac{3}{2} (A_3 \bar{A}_3)^2 + 6 (|A_1| |A_2|)^2 \\
 &+ 6 (|A_1| |A_3|)^2 + 6 (|A_2| |A_3|)^2
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

F_{hex} es tal que se cumple:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = -\frac{\delta F_{hex}}{\delta \bar{A}_1}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} = -\frac{\delta F_{hex}}{\delta \bar{A}_2}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial t} = -\frac{\delta F_{hex}}{\delta \bar{A}_3},$$

y tres ecuaciones similares para los complejos conjugados.

Si consideramos: $A_1 = A_2 = A_3 = A_0$ con A_0 real, podemos calcular el valor de F_{hex} , la energía libre, para la solución hexagonal. En cuyo caso la ecuación (4.12) queda como:

$$F_{hex} = \left(-2\epsilon A_0^2 - 2g A_0^3 + \frac{15}{2} A_0^4 \right) \tag{4.13}$$

Usando la amplitud que produce hexágonos estables:

$$A_0 = \frac{g + \sqrt{g^2 + 15\epsilon}}{15}$$

se obtiene la energía libre que corresponde a un patrón de hexágonos:

$$\frac{F_{hex}}{g^4} = -\frac{4}{15^3} \left[1 + \sqrt{1 + 15\beta} \right] - \frac{2}{15^2} \left[3 + 2\sqrt{1 + 15\beta} \right] \beta - \frac{1}{10} \beta^2 \tag{4.14}$$

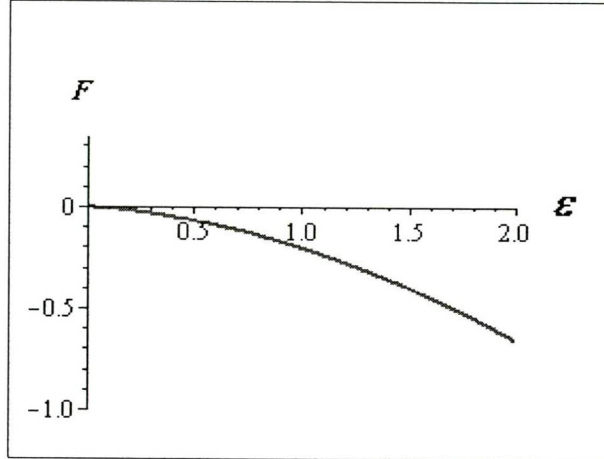


Figura 4.3: Funcional de energía para un patrón de hexágonos.

Claramente se observa que esta ecuación sólo depende de $\beta = \epsilon/g^2$.

En la figura 4.3 se grafica esta relación. Sin restricciones de generalidad, se ha considerado $g = 1$, lo que implica que $\beta = \epsilon$.

4.2.1. Comparación entre el patrón de bandas y el hexagonal

Ahora procedamos a comparar las energías para los patrones de bandas y de hexágonos, considerando $g = 1$. En la figura 4.4 se encuentran las gráficas para las energías de ambos patrones, observa que cuando ϵ es pequeño, la energía de los hexágonos es menor ($F_{hex} < F_{bandas}$), lo que significa que aunque ambos patrones pueden coexistir, el patrón de hexágonos tiende a prevalecer. Sin embargo, después del punto de intersección, es el patrón de bandas el que predomina.

El punto de transición se encuentra igualando ambas energías:

$$\begin{aligned} & - \frac{4}{15^3} \left[1 + \sqrt{1 + 15\beta} \right] - \frac{2}{15^2} \left[3 + 2\sqrt{1 + 15\beta} \right] \beta - \frac{1}{10} \beta^2 \\ & = -\frac{1}{6} \beta^2 \end{aligned}$$

De donde:

$$\epsilon^* = \beta^* = \frac{14}{15} + \frac{2\sqrt{6}}{5} = 1.91 \quad (4.15)$$

Este resultado fue obtenido por [10].

Es importante recordar que un análisis de este tipo, energético, no nos dice nada sobre la estabilidad de las soluciones, solo nos indica cual patrón, suponiendo que es estable, es más susceptible de ser observado.

4.3. Solución Numérica

De la misma forma que en la sección 2.5, resolvimos numéricamente la ecuación de Swift-Hohenberg, ahora resolveremos la ecuación de SHG considerando el termino ψ^2 , con el factor c incluido:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - c(q_c^2 + \nabla^2)^2 \psi + g \psi^2 - \psi^3 \quad (4.16)$$

Nuevamente se discretizó el espacio en una malla de 256×256 puntos, con paso espacial (dx) de 0.5 y temporal (dt) de 0.1, el número de onda crítico fue de $q_c = 1$. Las condiciones iniciales fueron aleatorias y las de frontera periódicas.

En cada corrida típicamente se realizaron de 1000 a 5000 iteraciones temporales. El tiempo de máquina, en una pentium

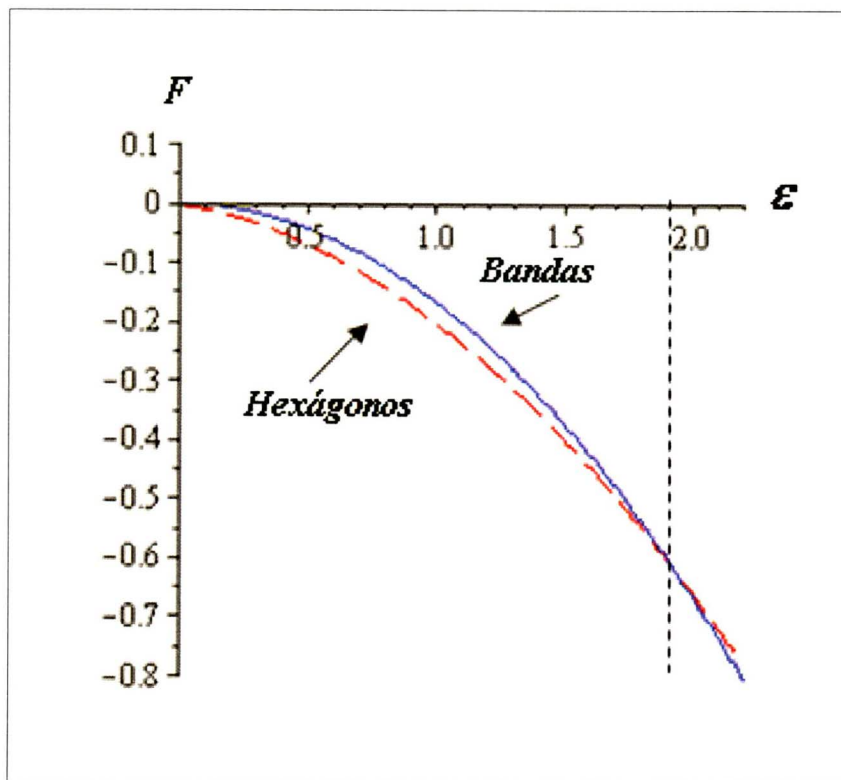


Figura 4.4: Funcional de energía para un patrón de hexágonos y de bandas. Los hexágonos tienen menor energía cuando ϵ es pequeña, pero para $\epsilon = 1.91$ (la línea punteada) se produce la transición a bandas.

3, fue de entre 3 y 8 minutos, lo que indica la buena eficiencia del programa.

Los resultados obtenidos están de acuerdo con el análisis anterior, se encontró que los patrones estables resultantes fueron de hexágonos y de bandas. En la figura 4.5 se presentan los resultados correspondientes, cada punto representa una corrida para el valor de ϵ respectivo.

Puede verse que para valores de ϵ pequeños, predominan los hexágonos, mientras que las bandas dominan cuando ϵ aumenta. El valor de transición entre patrones se encuentra en el rango esperado.

Es importante mencionar que cerca del punto de transición ambos patrones coexisten en tiempos relativamente largos hasta que uno de ellos domina. Por ejemplo en la figura 4.6 se encuentran los patrones correspondientes para $\epsilon = 1.7$, con 200, 800, y 2000 iteraciones.

Por otro lado como ya se mencionó, los patrones de bandas y hexágonos son soluciones estables de las ecuaciones de amplitud, esto se confirmó resolviendo numéricamente la ecuación de SHG, pero ahora con condiciones iniciales no azarosas; es decir se consideró como condición inicial un patrón hexagonal y uno de bandas. Encontramos que ambos patrones se mantienen cuando ϵ varía, indicando su estabilidad. En la figura 4.7 se presentan los resultados.

4.3 Solución Numérica

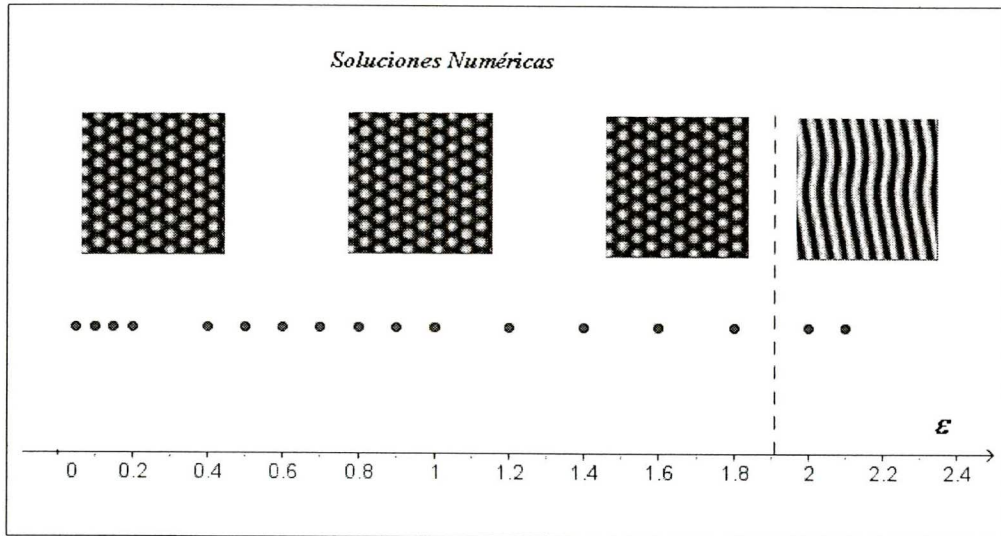


Figura 4.5: Resultados numéricos para la ecuación de SHG con condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica (un patrón) para un valor fijo de ϵ . La línea punteada indica el valor de transición teórico.

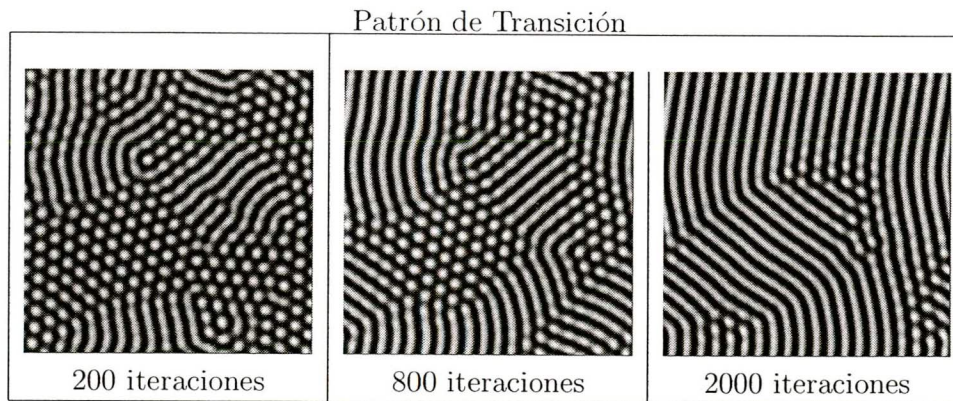


Figura 4.6: Patrón de transición entre hexágonos y bandas, para $\epsilon = 1.7$, con 200, 800 y 2000 iteraciones temporales.

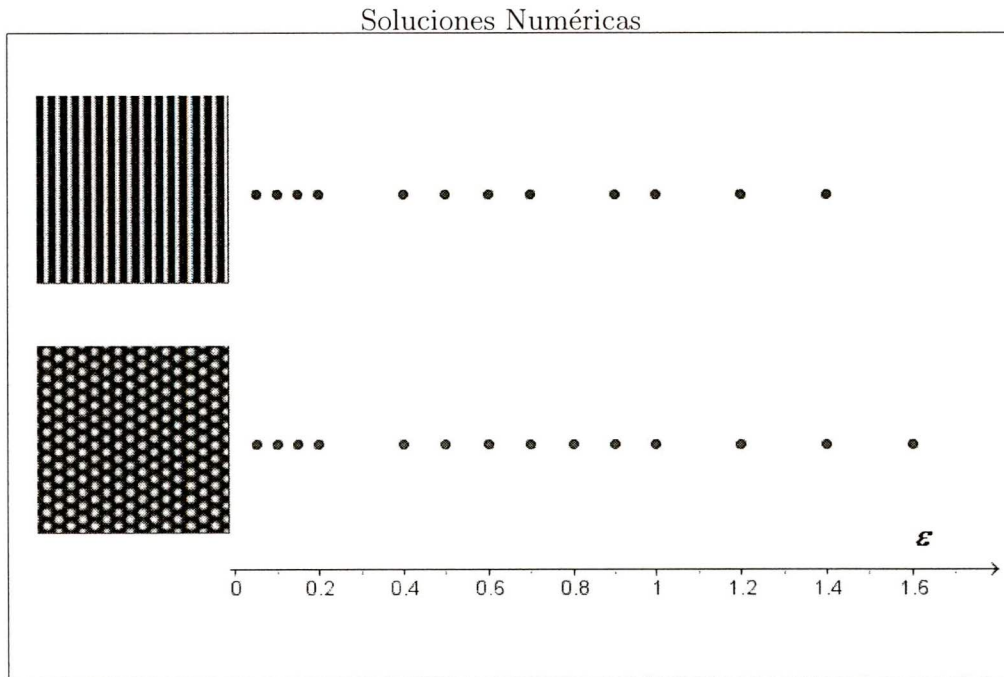


Figura 4.7: Resultados numéricos para la ecuación de SHG con condiciones iniciales no aleatorias. Es decir, iniciando con los patrones de la izquierda observamos que éstos se mantienen en el rango de la ϵ considerada.

Capítulo 5

Ecuación de SHG con dos modos

A partir de aquí se presentará algunos resultados originales obtenidos durante la realización esta tesis.

En el primer capítulo mencionamos que cuando un fluido es perturbado por oscilaciones sinusoidales verticales, de una frecuencia específica, se produce en su superficie un conjunto de patrones, conocidos como ondas de Faraday. Generalmente se obtienen, en las primeras bifurcaciones, patrones de bandas y cuadrados.

En 1994, Edwards y Fauve [18] realizaron una serie de experimentos en los cuales introducen oscilaciones de dos frecuencias para perturbar el fluido. Ellos encuentran formaciones de patrones periódicos con simetría 2 (bandas), 4 (cuadrados), 6 (hexágonos) y también patrones cuasiperiódicos con simetría doce (dodecágonos). Como se podrá suponer ni la ecuación de Swift-Hohenberg ni su generalización, tienen soluciones de cuadrados y dodecágonos estables [3].

Tratando de reproducir teóricamente estos resultados, en 1997 Ron Lifshitz y Dean Petrich [10] propusieron una generalización

de la ecuación de Swift-Hohenberg (una generalización de diferente tipo a la expuesta en el capítulo anterior) como modelo para estudiar la dinámica de ondas superficiales en un fluido generadas por la combinación lineal de oscilaciones con dos frecuencias, su propuesta es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi - c(1 + \nabla^2)^2(q^2 + \nabla^2)^2 \psi + g\psi^2 - \psi^3. \quad (5.1)$$

Con q una constante diferente de 1.

La ecuación anterior (5.1) se denomina: ecuación de Swift-Hohenberg generalizada con dos modos, 'Ecuación de SHG con dos modos'.

Mediante un análisis lineal encontramos que para perturbaciones del tipo: $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \sigma_k t)$, del estado uniforme $\psi = 0$, la razón de crecimiento tiene la forma:

$$\sigma_k = \epsilon - c(1 - k^2)^2(q^2 - k^2)^2 \quad (5.2)$$

La cual generaliza la encontrada en el capítulo 3. En la figura 5.1 se encuentra la gráfica de σ_k con respecto al número de onda de la perturbación. Como se puede observar es posible tener dos modos inestables con diferente periodicidad, y tener con ello multitud de patrones estables. En la referencia [10] hay una gran variedad de resultados de patrones producidos mediante este mecanismo.

En particular si consideramos el número de onda $q = \sqrt{2}$ se pueden obtener patrones cuadrados. En la primera parte de este capítulo verificaremos que esto es así, y obtendremos las ecuaciones de amplitud y energía. Es importante mencionar que

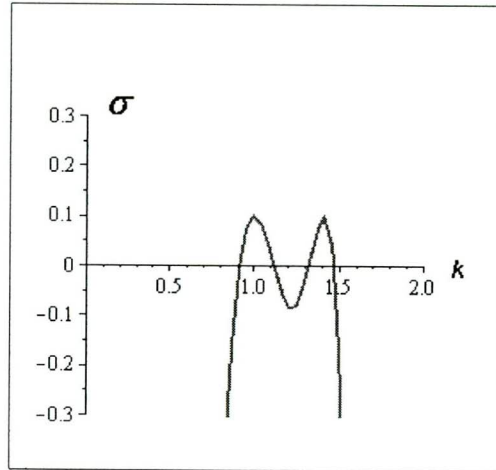


Figura 5.1: Razón de crecimiento para una solución de un patrón cuadrado, se puede observar que ahora son dos números de onda ($q_1 = 1, q_2 = q = \sqrt{2}$) los que inician la inestabilidad.

este análisis de un patrón de cuadrados no está reportado en la literatura y que será importante ya que se utilizará para cuando se estudie el patrón de rectángulos, otro de los objetivos de esta tesis.

En la segunda parte de este capítulo se comprobará cómo dicho modelo produce los cuasipatrones con formas dodecagonales, considerando para ello los números de onda inestables: $q_1 = 1$ y $q = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2 \cos(\pi/12)$.

Finalmente debido a que este modelo, con los números de onda inestables anteriores, también admite soluciones de bandas y hexágonos, compararemos sus energías y veremos cual es el que prevalece para cada valor de ϵ . Se corroborarán los resultados resolviendo numéricamente la ecuación (5.1).

5.1. Patrón cuadrado

Supongamos que una solución de la ecuación (5.1) con $q = \sqrt{2}$, es un patrón de cuadrados:

$$\psi = \sum_{j=1}^4 A_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}} + B_j e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}} + C.C. \quad (5.3)$$

En la figura 5.2 se muestran las direcciones de los números de onda que generan un patrón cuadrado, obsérvese que dichos vectores (8 en total) se encuentran sobre dos anillos concéntricos; los vectores \mathbf{q}_j son tales que $|\mathbf{q}_j| = 1$ y los vectores $|\mathbf{k}_j| = \sqrt{2}$.

Recuérdese que estamos considerando el caso en el que los números de onda inestables son: 1 y $\sqrt{2}$. Se puede observar cómo la suma de dos vectores pequeños perpendiculares generan un vector grande, y la de dos vectores perpendiculares grandes genera dos veces un vector pequeño. Los vectores punteados representan la dirección de los complejos conjugados.

5.1.1. Ecuaciones de amplitud y energía

Para encontrar las ecuaciones de amplitud, procederemos de la misma forma como obtuvimos el patrón de hexágonos (sección 4.1), es decir basados en el análisis débilmente no lineal, encontraremos los términos resonantes que se producen al sustituir la solución propuesta (5.3) en la ecuación (5.1). Por ejemplo, en la ecuación para A_1 tenemos que determinar los términos que son proporcionales a $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$, y en la ecuación para B_1 los que son proporcionales a $e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x}}$, y así sucesivamente.

Como ejemplo obtendremos la ecuación para la amplitud A_1 y B_1 :

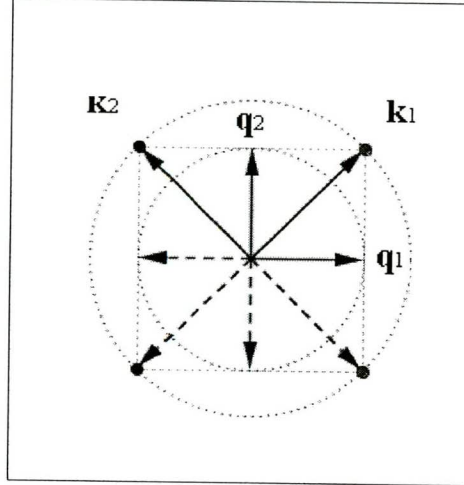


Figura 5.2: Diagrama de los vectores que generan un patrón cuadrado. Obsérvese cómo la suma de dos vectores pequeños perpendiculares generan un vector grande y la de dos vectores perpendiculares grandes genera dos veces un vector pequeño.

Obsérvese en la figura (5.2) que el vector \mathbf{k}_1 , del anillo exterior, se puede obtener de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{k}_1 &= -\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2\end{aligned}$$

Además de las identidades más 'triviales':

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2. \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

De donde, considerando sólo los términos resonantes para A_1 :

- El término ψ^2 , genera: $2gB_1B_2$

- El término ψ^3 , genera:
 - $3A_1A_1\bar{A}_1, \quad 6A_1A_2\bar{A}_2, \quad 6A_1B_1\bar{B}_1, \quad 6A_1B_2\bar{B}_2$
 $3A_2B_1B_1, \quad 3\bar{A}_2B_2B_2$

Por lo tanto, la ecuación para la amplitud A_1 es:

$$\begin{aligned}
 \partial_t A_1 &= \epsilon A_1 + 2gB_1B_2 + \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 A_1 \\
 &- (3|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B_1|^2 + 6|B_2|^2) A_1 \\
 &- 3A_2B_1^2 - 3\bar{A}_2B_2^2.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Aplicando el mismo procedimiento obtenemos las ecuaciones para la otra amplitudes del anillo exterior.

Para el caso de un vector del anillo interior, observa en la figura (5.2) que el vector \mathbf{q}_1 , se puede obtener de las siguientes forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1 &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_2 \\
 \mathbf{q}_1 &= -\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_2 \\
 \mathbf{q}_1 &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1
 \end{aligned}$$

Además de las identidades más 'triviales':

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2. \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_i + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

De donde, considerando sólo los términos resonantes para B_1 :

- El término ψ^2 produce: $2gA_1\bar{B}_2, \quad 2g\bar{A}_2B_2$.
- El término ψ^3 produce:

$$\bullet \quad \begin{aligned} & 3B_1B_1\bar{B}_1, \quad 6B_1B_2\bar{B}_2, \quad 6B_1A_1\bar{A}_1, \quad 6B_1A_2\bar{A}_2 \\ & 6A_1\bar{A}_2\bar{B}_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación para la amplitud B_1 es:

$$\begin{aligned} \partial_t B_1 &= \epsilon B_1 + 2gA_1\bar{B}_2 + 2g\bar{A}_2B_2 - \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 B_1 \\ &- (3|B_1|^2 + 6|A_1|^2 + 6|B_2|^2) B_1 - 6A_1\bar{A}_2\bar{B}_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Aplicando el mismo procedimiento obtenemos la ecuación para la otra amplitud del anillo interior.

Como lo que nos interesa son las soluciones estacionarias y uniformes ($\partial_x = \partial_y = 0$, $\partial_t = 0$), éstas se obtienen de:

$$\begin{aligned} \epsilon A_1 &+ 2gB_1B_2 - (3|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B_1|^2 + 6|B_2|^2) A_1 \\ &- 3A_2B_1^2 - 3\bar{A}_2B_2^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon A_2 &+ 2g\bar{B}_1B_2 - (3|A_2|^2 + 6|A_1|^2 + 6|B_1|^2 + 6|B_2|^2) A_2 \\ &- 3\bar{A}_1B_2^2 - 3A_1\bar{B}_1^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon B_1 &+ 2gA_1\bar{B}_2 + 2g\bar{A}_2B_2 - (3|B_1|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B_2|^2) B_1 \\ &- 6A_1\bar{A}_2\bar{B}_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon B_2 &+ 2gA_1\bar{B}_1 + 2gA_2B_1 - (3|B_2|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B_1|^2) B_2 \\ &- 6A_1A_2\bar{B}_2 = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo A y B reales, se tiene que:

- Si $A_1 = A_2 = 0$ y $B_1 = B_2 = 0$, se tiene un estado homogéneo.
- Si $A_1 \neq 0$ ó $A_2 \neq 0$ y $B_1 = 0$ y $B_2 = 0$ ó viceversa, se obtiene una solución que representa un patrón de de bandas.
- Si $A_1 = A_2 = A$ y $B_1 = B_2 = B$, se tiene una solución que representa un patrón de cuadros.

En este último caso, el sistema de ecuaciones anterior queda:

$$\epsilon A + 2gB^2 - 9A^3 - 18B^2A = 0 \quad (5.6)$$

$$\epsilon B + 4gAB - 9B^3 - 18A^2B = 0 \quad (5.7)$$

De donde para A y B diferentes de cero, si despejamos B^2 de (5.7), obtenemos:

$$B^2 = \frac{\epsilon + 4gA - 18A^2}{9}$$

Sustituyendo en (5.6), queda una ecuación sólo para A :

$$2g\epsilon + 243A^3 - 108gA^2 + (8g^2 - 9\epsilon)A = 0. \quad (5.8)$$

Sin restricciones de generalidad, si elegimos $g = 1$, esta ecuación tiene tres soluciones reales, en la figura (5.3A) se grafican con respecto a ϵ ; más adelante seleccionaremos la que produzca la menor energía.

Por otro lado, de la misma forma que en los capítulos precedentes las ecuaciones de amplitud se pueden escribir derivando una funcional de energía, la cual en este caso es:

$$F_{cuad} = -\epsilon A_1 \bar{A}_1 - \epsilon A_2 \bar{A}_2 - \epsilon B_1 \bar{B}_1 - \epsilon B_2 \bar{B}_2 - 2g B_1 B_2 \bar{A}_1$$

$$\begin{aligned}
& - 2g\bar{B}_1 B_2 \bar{A}_2 - 2gA_1 \bar{B}_1 \bar{B}_2 - 2gA_2 B_1 \bar{B}_2 + \frac{3}{2}(A_1 \bar{A}_1)^2 \\
& + \frac{3}{2}(A_2 \bar{A}_2)^2 + \frac{3}{2}(B_1 \bar{B}_1)^2 + \frac{3}{2}(B_2 \bar{B}_2)^2 + 6(|A_1||A_2|)^2 \\
& + 6(|A_1||B_1|)^2 + 6(|A_1||B_2|)^2 + 6(|A_2||B_1|)^2 + 6(|A_2||B_2|)^2 \\
& + 6(|B_1||B_2|)^2 + 3A_2 B_1^2 \bar{A}_1 + 3\bar{A}_2 B_2^2 \bar{A}_1 + 3A_1 \bar{B}_1^2 \bar{A}_2 \\
& + 3A_2 \bar{B}_2^2 A_1. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Obsérvese que se cumple:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta \bar{A}_i}, \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta \bar{B}_i}$$

Si hacemos $A_1 = A_2 = A$ y $B_1 = B_2 = B$, la energía libre del patrón de cuadros (5.9), queda de la forma:

$$\begin{aligned}
F_{cuad} & = -2\epsilon A^2 - 2\epsilon B^2 - 8gB^2 A + 9A^4 + 9B^4 + 36A^2 B^2 \\
& = -2\epsilon(A^2 + B^2) + 9(A^4 + B^4) - 8gB^2 A \\
& + 36A^2 B^2. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Por otro lado si se multiplican las ecuaciones (5.6) por A , (5.7) por B y se suman, se tiene:

$$-2\epsilon(A^2 + B^2) + 9(A^4 + B^4) - 8gB^2 A + 36A^2 B^2 = 0 \tag{5.11}$$

Sustituyendo (5.11) en la ecuación para la energía (5.10), se tiene (para $g = 1$):

$$F_{cuad} = -\frac{1}{9} \{ \epsilon^2 + 6A\epsilon - (9\epsilon - 8)A^2 - 36A^3 \}. \tag{5.12}$$

Donde A está dada por cada una de las tres soluciones de la ecuación (5.8). En la figura 5.3B se muestran los posibles valores

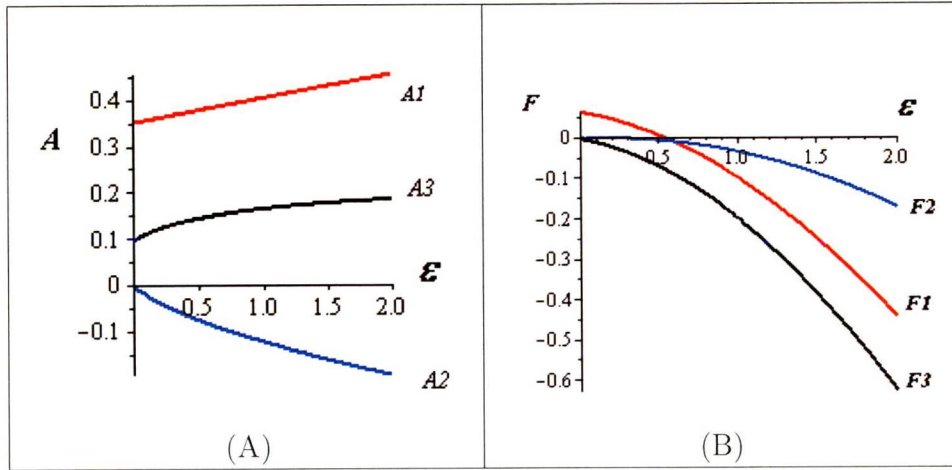


Figura 5.3: (A) Las tres soluciones de la ecuación (5.8). (B) La energía libre considerando las tres soluciones de la izquierda. La que utilizaremos será $F_{cuad} = F_3$.

de la energía considerando las diversas soluciones (no la trivial $A = 0$) de la ecuación para A (5.8). Tomaremos la que tenga menor energía para ϵ fija, es decir: $F_{cuad} = F_3$.

5.1.2. Comparación entre los patrones de bandas, cuadrados y hexágonos

Debido a que este modelo acepta soluciones estables de bandas y hexágonos, compararemos sus energías con respecto a la energía del patrón de cuadrados.

En la figura 5.4 se presentan las gráficas de las energías para los patrones de cuadros F_{cuad} (curva sólida), bandas F_{ban} (curva punteada) y hexágonos F_{hex} (curva con puntos y rallas) con respecto a ϵ . Para facilitar la lectura se ha separado en cuatro gráficas dependiendo del valor de ϵ .

Podemos observar que cuando ϵ es pequeño, $F_{cuad} < F_{hex} < F_{ban}$,

lo que significa que aún cuando los tres patrones pueden coexistir, el que seguramente prevalecerá será el de cuadros. Cuando el valor de ϵ aumente y pase el punto de intersección (aproximadamente $\epsilon = 0.76$), se encuentra que $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$, lo que significa que ahora prevalecerá el patrón de hexágonos. Finalmente cuando la ϵ siga aumentando y sobrepase el siguiente punto de intersección (aproximadamente $\epsilon = 1.91$), el patrón dominante será el de bandas ($F_{ban} < F_{hex} < F_{cuad}$).

5.1.3. Solución numérica

Como se ha hecho en los capítulos anteriores. procederemos a resolver numéricamente la ecuación de SHG con dos modos (5.1):

Nuevamente se discretizó el espacio en una malla de 256×256 puntos, con paso espacial (dx) de 0.4 y temporal (dt) de 0.1, los números de onda críticos fueron ahora 1 y $\sqrt{2}$. Las condiciones iniciales fueron aleatorias y las de frontera periódicas. El programa en Fortran utilizado tiene la misma estructura que el del apéndice E.

Los resultados obtenidos están de acuerdo con el análisis energético: a medida que ϵ aumenta, los patrones estables resultantes fueron los de cuadros, hexágonos y bandas. En la figura 5.5 se presenta la gráfica con los resultados correspondientes, cada punto representa un evento numérico resultante, para la ϵ respectiva.

Se observa que cuando (aproximadamente) $\epsilon < 0.8$ los cuadros predominan, aumentando la ϵ quedan los hexágonos y finalmente, para valores superiores de ϵ son las bandas.

Los valores de transición entre los patrones se encuentran en el rango esperado.

FUNCIONAL DE ENERGÍA PARA DIFERENTES INTERVALOS DE ϵ .

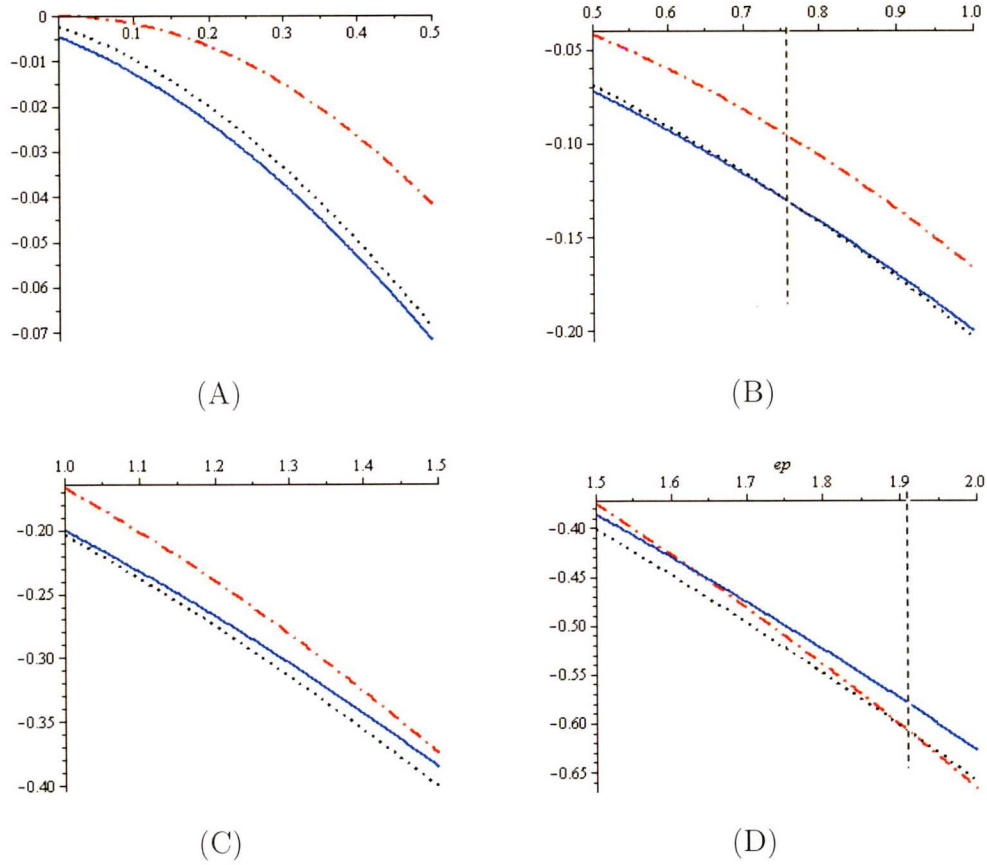


Figura 5.4: Graficas de la energía para los patrones de cuadros (curva sólida), bandas (curva punteada) y hexágonos (curva con puntos y rallas). A) $F_{cuad} < F_{hex} < F_{ban}$. B) $F_{cuad} < F_{hex} < F_{ban}$, hasta el punto de itersección (línea recta punteada) en $\epsilon = 0.76$, después se tiene $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$. C) $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$. D) $F_{hex} < F_{cuad} < F_{ban}$, hasta llegar al punto de intersección en $\epsilon = 1.91$, después se tiene $F_{ban} < F_{hex} < F_{cuad}$.

Patrones Resultantes

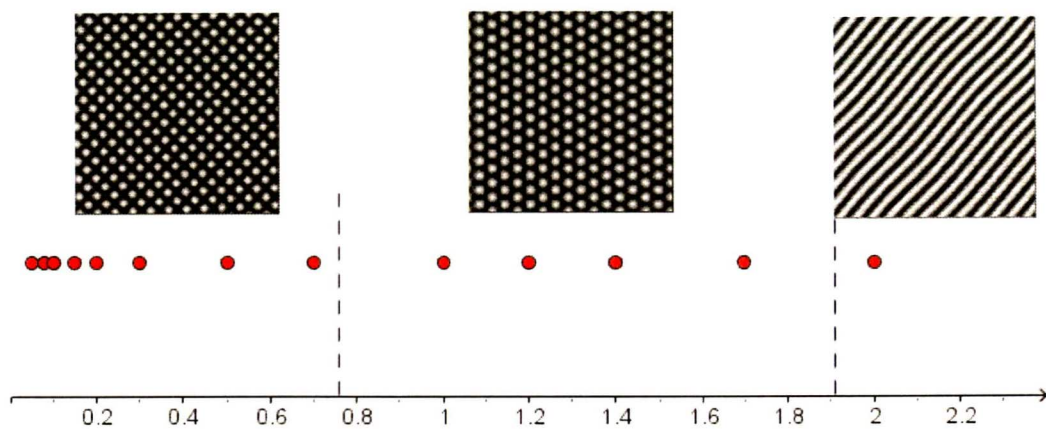


Figura 5.5: Resultados numéricos para la ecuación de SHG con dos modos. Obsérvese que se presentan los patrones previstos (cuadros, hexágonos y bandas) dentro de los rangos teóricos encontrados (líneas punteadas, $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$). Las condiciones iniciales fueron al azar.

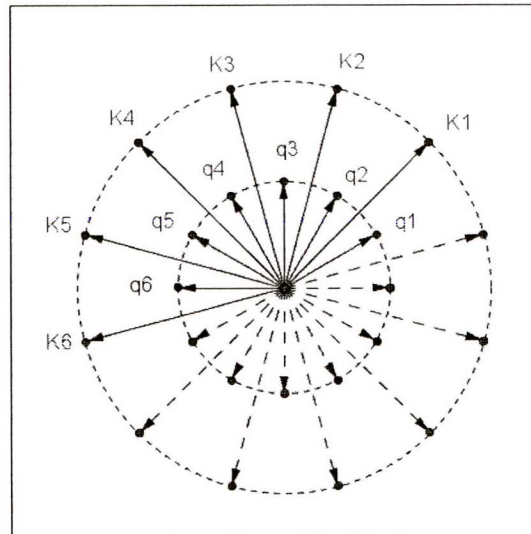


Figura 5.6: Diagrama de los vectores que generan la fase dodecagonal. El ángulo entre cada dos vectores del mismo tipo es de $\pi/6$. Los vectores punteados representan complejos conjugados.

5.2. Patrón de dodecágonos

Ahora supongamos que la solución de la ecuación (5.1) con $q = 2 \cos(\pi/12)$, es un patrón de dodecágonos:

$$\psi = \sum_{j=1}^{12} A_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}} + B_j e^{i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}} + C.C. \quad (5.13)$$

En la figura 5.6 se muestran los dos anillos con los vectores de onda que forman el patrón dodecagonal. Un anillo tiene radio $|\mathbf{q}_j| = 1$ y el otro $|\mathbf{k}_j| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2 \cos(\pi/12)$. El ángulo entre cada dos vectores del mismo tipo es de $\pi/6$, los vectores punteados representan los complejos conjugados.

5.2.1. Ecuaciones de amplitud y energía.

Es importante mencionar que los autores R. Lifshitz y M. Petrich. en 1997, [10] utilizando la ecuación de SHG con dos modos (y $q = 2 \cos(\pi/12)$), obtienen el valor de la energía del patrón dodecagonal y su intervalo es más estable: hasta $\epsilon < 0.087$. Pero retomando sus cálculos nos dimos cuenta que presentan un error, ya que no toman en cuenta todos los términos resonantes. En nuestro análisis encontramos que aún cuando los dodecágonos son una solución estable, su intervalo de estabilidad es menor ($\epsilon < 0.023$, ver más adelante) al que ellos presentan.

En lo que sigue encontraremos las ecuaciones de amplitud y energía, corrigiendo el resultado presentado en [10].

Aplicando el mismo método que se utilizó en los patrones hexagonal y de cuadrados, encontraremos las ecuaciones de amplitud para el patrón dodecagonal. En otras palabras, encontraremos los términos resonantes que se producen al sustituir la solución (5.13) en la ecuación (5.1): para A_1 los términos que consideraremos son los proporcionales a $e^{ik_1 \cdot x}$, para B_1 los proporcionales a $e^{iq_1 \cdot x}$, y así sucesivamente.

En el apéndice C se presentan el procedimiento para obtener las ecuaciones de amplitud y las ecuaciones para las soluciones estacionarias y uniformes.

Suponiendo $A_i = A$ y $B_i = B$ ($i = 1, \dots, 6$) con A y B reales, estas últimas soluciones quedan como:

$$\begin{aligned} \epsilon A + 2gA^2 + 2gB^2 + 4gAB \\ - \{33A^3 + 12B^3 + 60B^2A + 36A^2B\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon B + 2gB^2 + 2gA^2 + 4gAB \\ - \{33B^3 + 12A^3 + 60A^2B + 36B^2A\} = 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar, estas ecuaciones son simétricas en A y B , por lo que si hacemos $A = B = A_0$, quedan de la forma:

$$A_0(141A_0^2 - 8gA_0 - \epsilon) = 0 \quad (5.14)$$

Para A real, las soluciones no triviales son:

$$A_0^+ = \frac{4g + \sqrt{16g^2 + 141\epsilon}}{141} \quad (5.15)$$

$$A_0^- = \frac{4g - \sqrt{16g^2 + 141\epsilon}}{141} \quad (5.16)$$

En la figura 5.7A, se presenta la forma que tienen estas soluciones, donde se ha supuesto, sin pérdida de generalidad, $g = 1$. Más adelante se considerará la que genere la menor energía.

Por otro lado, en el mismo apéndice C, se encuentra la forma que adquiere la energía:

$$\begin{aligned} F_{dode} &= -6\epsilon (A^2 + B^2) - 8g(A + B)^3 \\ &+ \{99A^4 + 99B^4 + 216A^2B^2\} \\ &+ \{144A^3B + 144B^2A^2 + 156B^3A\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si hacemos $A = B = A_0$, queda:

$$\begin{aligned} F_{dode} &= -12\epsilon A_0^2 - 64gA_0^3 + 858A_0^4 \\ &= -A_0 (12\epsilon A_0 + 64gA_0^2 - 858A_0^3) \end{aligned} \quad (5.18)$$

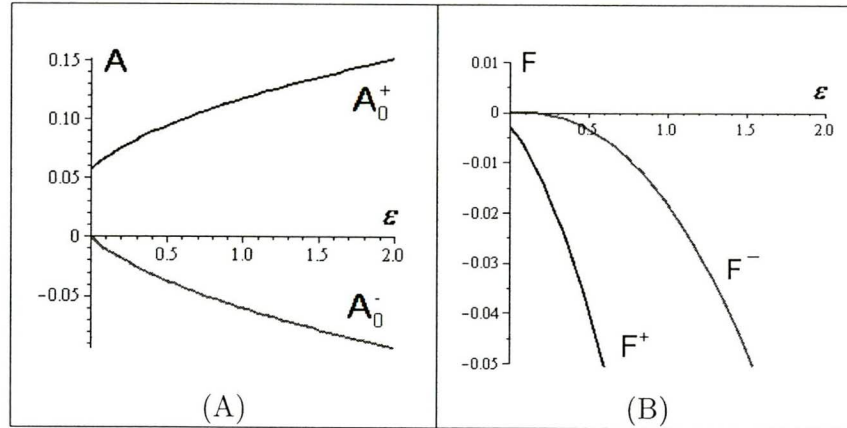


Figura 5.7: (A) Las dos soluciones de ecuación (5.14). (B) La energía libre considerando ambas soluciones de la izquierda. La que utilizaremos será $F_{dode} = F^+$.

Donde A_0 está dada por las dos soluciones de la ecuación (5.14). En la figura (5.7B) se muestran los dos posibles valores de la energía considerando las soluciones de A_0 . Tomaremos la que tenga menor energía para ϵ fija, es decir: $F_{dode} = F^+$.

5.2.2. Comparación entre el patrón de bandas, el hexagonal y el dodecagonal

Igual que para el análisis del patrón de cuadros, el modelo de SHG con dos modos ($q_1 = 1, q_2 = 2 \cos(\pi/12)$), también acepta las soluciones de bandas y hexágonos, por lo que podemos comparar sus energías. En la figura (5.8) se presentan las gráficas de las energías para los patrones de dodecágonos F_{dode} (curva sólida), bandas F_{ban} (curva punteada) y hexágonos F_{hex} (curva con puntos y rallas) con respecto a ϵ . También se ha hecho una ampliación para apreciar el cruce entre las curvas de hexágonos y dodecágonos (a ϵ pequeño). Nótese que cuando ϵ es muy

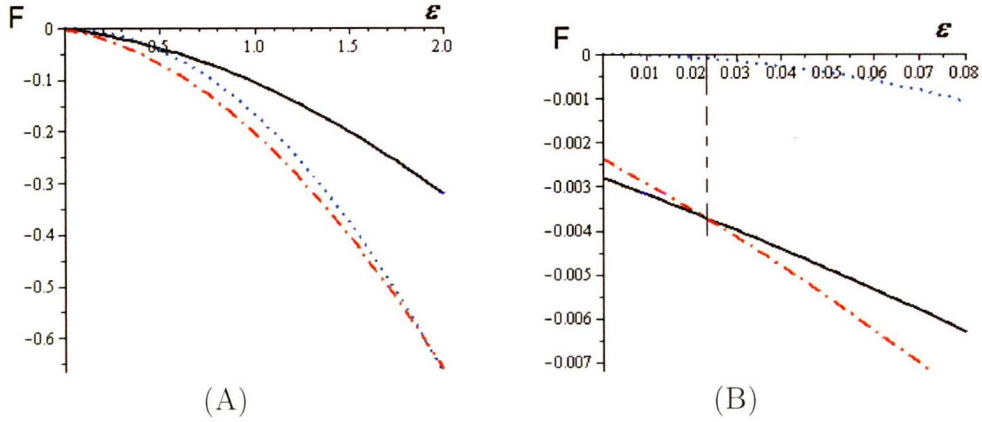


Figura 5.8: Funcional de energía: A) Funcional de energía para los patrones de dodecágonos (curva sólida), bandas (curva punteada) y hexágonos (curva con puntos y rallas). B) Misma gráfica para valores pequeños de ϵ , puede apreciarse que la menor energía corresponde a los dodecágonos, hasta $\epsilon = 0,023$.

pequeño, $F_{dode} < F_{hex} < F_{ban}$, lo que significa que aun cuando los tres patrones pueden coexistir, el que seguramente prevalecerá será el de dodecágonos. Cuando ϵ aumente y pase el punto de intersección (aproximadamente $\epsilon = 0,023$), se encuentra que $F_{hex} < F_{dode} < F_{ban}$, por lo que ahora son los hexágonos los que podrían surgir. Y finalmente, para $\epsilon > 1,91$ el patrón dominante será el de bandas.

5.2.3. Solución Numérica

Con la misma técnica de los dos capítulos anteriores, se procedió a resolver numericamente la ecuación de Swift-Hohenberg con dos modos. Primero consideramos condiciones iniciales aleatorias, y de frontera periódicas.

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - c(1 + \nabla^2)^2 (q^2 + \nabla^2)^2 \psi + \psi^2 - \psi^3. \quad (5.19)$$

Los números de onda críticos que ahora consideraremos son: 1 y $q = (2 + \sqrt{3})^{1/2} = 2 \cos(\pi/12)$

El espacio se discretizó en una malla de puntos, se tomaron 256×256 puntos, con paso espacial de ($dx = 0.5$) y temporal de $dt = 0.1$. En el apéndice C se muestra la deducción del algoritmo y el programa, en FORTRAN, empleado.

Típicamente se realizaron de 2000 a 3000 iteraciones. El tiempo de máquina, en una pentium 3, fue de aproximadamente 15 minutos.

Se encontró que los patrones estables resultantes fueron: dodecágonos, hexágonos comprimidos, hexágonos y bandas; tal como lo predijo el análisis energético que realizamos. En la figura 5.9 se presentan los resultados correspondientes, puede verse que para valores de ϵ muy pequeños, hasta aproximadamente $\epsilon = 0.02$, el patrón resultante es el de dodecágonos, Para valores mayores de ϵ hasta 1.9 se tienen hexágonos regulares y hexágonos comprimidos. Finalmente las bandas se presentan para valores de ϵ mayores.

Si ahora modificamos las condiciones iniciales, esto es, si consideramos como condición inicial un patrón de dodecágonos, uno de hexágonos y uno de bandas; encontramos que los hexágonos y las bandas son bastante estables, siempre se mantienen (en el intervalo considerado). Los dodecágonos son estables, pero solamente para ϵ pequeñas.

Patrones Resultantes

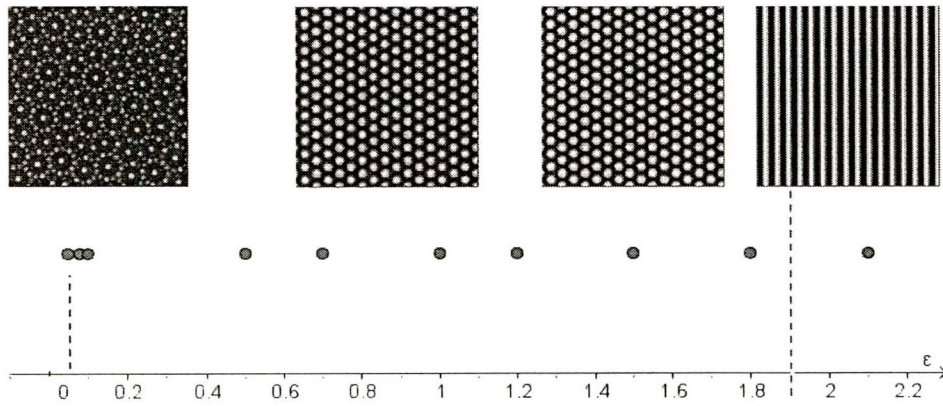


Figura 5.9: Resultados numéricos para la ecuación de SHG con dos modos, teniendo condiciones iniciales aleatorias. Cada punto representa una solución numérica, que corresponde al patrón resultante (el de arriba), las rectas punteadas indica los valores de transición teóricos: $\epsilon = 0.023$ y $\epsilon = 1.91$.

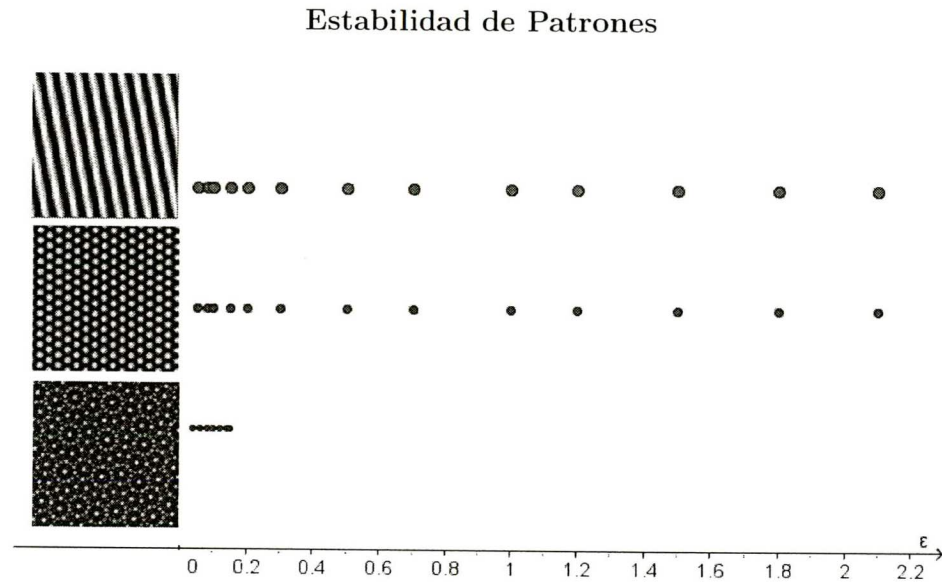


Figura 5.10: Resultados numéricos para la ecuación SHG con dos modos con condiciones iniciales correspondientes a un patrón específico (el de la izquierda). Cada punto representa una solución numérica, obsérvese que tanto los hexágonos como las bandas son estables para toda ϵ , pero los dodecágonos únicamente lo son para pequeños valores.

Capítulo 6

Ecuación de SHG con tres modos: patrones rectangulares

Además del estudio de patrones cuadrados y dodecagonales, en este capítulo se realiza una de las contribuciones más importantes de la tesis: proponer un modelo isotrópico de formación de patrones rectangulares. El cual, hasta donde se tiene información, es un estudio no reportado en la literatura especializada.

Aún cuando el modelo de Lifshitz y Petrich [10] predice la existencia de patrones con muy diversas simetrías, no puede reproducir patrones rectangulares, los cuales son muy comunes en redes cristalográficas. A manera de ejemplo, en la figura 6.1 se muestra cómo cuando se consideran los planos cristalográficos de una simple red cúbica, con índice de miller $(1, 1, 0)$ se obtiene un patrón rectangular, cuyos rectángulos tienen lados de longitudes 1 , $\sqrt{2}$ y diagonal $\sqrt{3}$.

En la perspectiva de formación de patrones, se tiene que los patrones rectangulares requieren tres números de onda inestables, lo que explica su rareza en sistemas no lineales.

Por ésta razón en este capítulo proponemos una extensión del

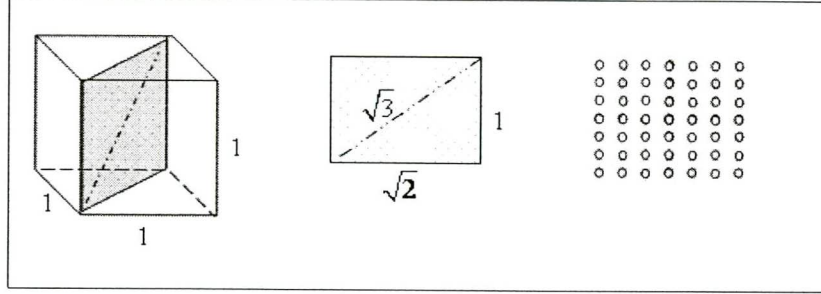


Figura 6.1: Patrón rectangular que se obtiene de un arreglo cristalográfico cúbico.

modelo estudiado en el capítulo anterior, tomando en cuenta tres modos. En otras palabras consideraremos superposiciones de modulaciones con números de onda $(q_1 = 1, q_2, q_3)$, los cuales deben además cumplir la relación: $q_1^2 + q_2^2 = q_3^2$.

La llamaremos ecuación de Swift-Hohenberg generalizada con tres modos (ecuación de SHG con tres modos), y tiene la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi - c(1 + \nabla^2)^2 (q_2^2 + \nabla^2)^2 (q_3^2 + \nabla^2)^2 \psi + \psi^2 - \psi^3. \quad (6.1)$$

En particular, consideraremos los números de onda $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{3}$, pero el análisis no se restringe sólo a ellos.

Mediante un análisis lineal como el del capítulo 2, encontramos que la razón de crecimiento es:

$$\sigma_k = \epsilon - c(1 - k^2)^2 (q_2^2 - k^2)^2 (q_3^2 - k^2)^2, \quad (6.2)$$

la cual se muestra, para un valor fijo de ϵ , en la figura 6.2. Obsérvese que la presencia de tres modos inestables con diferente periodicidad, nos ofrece la posibilidad obtener patrones estacionarios rectangulares.

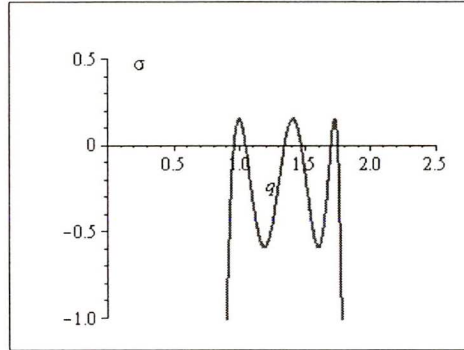


Figura 6.2: Razón de crecimiento para la ecuación de SHG con tres modos: $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{3}$.

6.1. Patrón rectangular

Supongamos que la solución de la ecuación 6.1 es un patrón de rectángulos:

$$\psi = A_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + A_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} + B e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} + C e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}} + c.c. \quad (6.3)$$

En la figura 6.3a se muestran, en el espacio de Fourier, los tres anillos con los vectores de onda que forman el patrón rectangular. Un anillo tiene radio $|\mathbf{k}_1| = q_3$, otro $|\mathbf{m}| = q_2$ y el tercero: $|\mathbf{l}| = q_1$, con $q_3 > q_2 > q_1$ y $q_3^2 = q_2^2 + q_1^2$, con ($q_1 = 1$). Obsérvese que la suma de un vector interno y un vector intermedio produce un vector externo y la suma de un externo con un interno produce un intermedio. Los vectores punteados representan complejos conjugados.

En la figura 6.3b se muestran los planos de onda en el espacio real, creados por el espectro de la figura de la izquierda 6.3a. Nótese como la superposición de ondas con longitud de

Espacio de Fourier y Espacio Físico

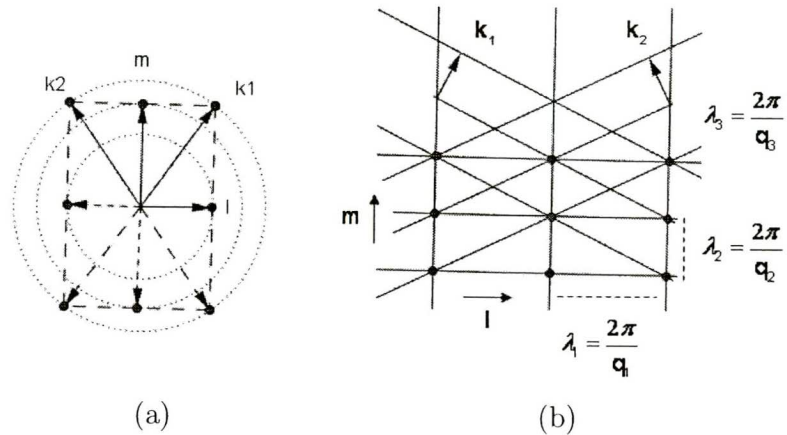


Figura 6.3: a) Diagrama de los vectores en el espacio de Fourier que generan la fase rectangular. b) Planos de onda, en el espacio real, formando un patrón rectangular. Las direcciones de propagación son (k_1, k_2, m, l) .

onda: $\lambda_1 = \frac{2\pi}{q_1}$, $\lambda_2 = \frac{2\pi}{q_2}$ y $\lambda_3 = \frac{2\pi}{q_3}$, generan un patrón rectangular. La longitud de onda λ_3 corresponde a la distancia entre las diagonales.

6.1.1. Ecuaciones de amplitud y energía.

Procederemos de la misma forma que en los capítulos anteriores, encontraremos los términos resonantes que se producen al sustituir la solución (6.3) en la ecuación (6.1). Es decir, para A_1 consideramos los términos que son proporcionales a $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$, para B los proporcionales a $e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}$ y para C los proporcionales a $e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}}$.

Mostraremos a continuación cómo obtener las ecuaciones de amplitud.

Primero obtendremos la ecuación para la amplitud A_1 :

Obsérvese de la figura 6.3 que el vector \mathbf{k}_1 , del anillo exterior, se puede obtener de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{m} + \mathbf{l} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{l} + \mathbf{l} \\ \mathbf{k}_1 &= -\mathbf{k}_2 + \mathbf{m} + \mathbf{m}\end{aligned}$$

Además de las identidades 'triviales':

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{l} - \mathbf{l} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{m} - \mathbf{m} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

De donde considerando solo los términos resonantes para A_1 :

- ψ^2 genera: $2gBC$
- ψ^3 genera:
 - $3A_1A_1\bar{A}_1, \quad 6A_1A_2\bar{A}_2, \quad 6A_1B\bar{B}, \quad 6A_1C\bar{C}$
 $3A_2CC, \quad 3\bar{A}_2BB$

Por lo tanto la ecuación para la amplitud A_1 es:

$$\begin{aligned}\partial_t A_1 &= \epsilon A_1 + 2gBC + \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 A_1 - 3A_2C^2 - 3\bar{A}_2B^2 \\ &- (3|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B|^2 + 6|C|^2) A_1\end{aligned}\quad (6.4)$$

De la misma forma para la amplitud A_2 :

$$\begin{aligned} \partial_t A_2 &= \epsilon A_2 + 2gB\bar{C} + \left(\partial_{x_2} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_2}^2 \right)^2 A_2 - 3A_1\bar{C}^2 - 3\bar{A}_1 B^2 \\ &\quad - (3|A_2|^2 + 6|A_1|^2 + 6|B|^2 + 6|C|^2) A_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ahora el turno es para la ecuación de la amplitud B :

Obsérvese en la figura 6.3 que el vector \mathbf{m} , del anillo intermedio, se puede obtener de las siguientes formas (la barra arriba indica el conjugado):

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{l} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{l} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{m} \end{aligned}$$

Además de las identidades ‘triviales’:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m} + \mathbf{l} - \mathbf{l} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m} + \mathbf{m} - \mathbf{m} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m} + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

De donde considerando solo los términos resonantes para B :

- ψ^2 genera: $2gA_1\bar{C}$, $2gA_2C$
- ψ^3 genera:
 - $3BB\bar{B}$, $6BA_1\bar{A}_1$, $6BA_2\bar{A}_2$, $6BCC\bar{C}$
 - $6A_1A_2\bar{B}$

Por lo tanto, la ecuación para la amplitud B es:

$$\begin{aligned} \partial_t B &= \epsilon B + 2gA_1\bar{C} + 2gA_2C + \left(\partial_y - \frac{i}{2k_c}\partial_x^2\right)^2 B \\ &- (3|B|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|C|^2) B - 6A_1A_2\bar{B} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación para la amplitud C :

Nuevamente de la figura 6.3 se observa que el vector \mathbf{l} , del anillo interior, se puede obtener de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{m} \\ \mathbf{l} &= -\mathbf{k}_2 + \mathbf{m} \\ \mathbf{l} &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{l} \end{aligned}$$

Además de las identidades ‘triviales’:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{l} + \mathbf{l} - \mathbf{l} \\ \mathbf{l} &= \mathbf{l} + \mathbf{m} - \mathbf{m} \\ \mathbf{l} &= \mathbf{l} + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

De donde considerando sólo los términos resonantes para C :

- ψ^2 produce: $2gA_1\bar{B}$, $2g\bar{A}_2B$
- ψ^3 produce:
 - $3C\bar{C}\bar{C}$, $6CA_1\bar{A}_1$, $6CA_2\bar{A}_2$, $6C\bar{B}\bar{B}$
 $6A_1\bar{A}_2\bar{C}$

Por lo tanto, la ecuación para la amplitud C es:

$$\begin{aligned} \partial_t C = & \epsilon C + 2gA_1\bar{B} + 2g\bar{A}_2B + \left(\partial_x - \frac{i}{2k_c}\partial_y^2\right)^2 B \\ & - (3|C|^2 + 6|A_1|^2 + 6|A_2|^2 + 6|B|^2)C - 6A_1\bar{A}_2\bar{C} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Debido a que lo que nos interesa son las soluciones uniformes y estacionarias, hacemos $\partial_t = 0$, $\partial_{x_i} = 0$ en las ecuaciones anteriores. Si además suponemos que las amplitudes (con A, B, C reales) cumplen: $A_1 = A_2 = A$, entonces las ecuaciones para las amplitudes que forman el patrón rectangular quedan de la forma:

$$\epsilon A + 2gBC - (9A^3 + 9AB^2 + 9AC^2) = 0 \quad (6.8)$$

$$\epsilon B + 4gAC - (3B^3 + 18A^2B + 6C^2B) = 0 \quad (6.9)$$

$$\epsilon C + 4gAB - (3C^3 + 18CA^2 + 6CB^2) = 0 \quad (6.10)$$

Observa que en las dos últimas ecuaciones, C y B juegan un papel simétrico, de lo cual concluimos que $B = C$ es solución. Por lo tanto, el sistema anterior se reduce a:

$$\epsilon A + 2gB^2 - (9A^3 + 18AB^2) = 0 \quad (6.11)$$

$$\epsilon B + 4gAB - (9B^3 + 18A^2B) = 0 \quad (6.12)$$

Las cuales son idénticas a las ecuaciones (5.6) y (5.6) que describen un patrón cuadrado. Por lo tanto, retrospectivamente nos damos cuenta que se requiere el mismo número de amplitudes para describir un patrón cuadrado y un patrón rectangular.

Y que además las relaciones de resonancia son idénticas, por lo que las ecuaciones correspondientes también lo serán.

Considerando lo anterior y siguiendo los pasos del capítulo 4, la ecuación para la energía será la misma:

$$F_{rect} = -\frac{1}{9} \{ \epsilon^2 + 6A\epsilon - (9\epsilon - 8)A^2 - 36A^3 \} \quad (6.13)$$

La gráfica de esta energía junto con la de los hexágonos y bandas es la misma que la de los cuadros, hexágonos y bandas y se presenta en la figura 5.4, las conclusiones son las mismas que las de la sección 4.1.2, sólo hay que sustituir 'cuadrado' por 'rectángulo'.

Este resultado tiene una consecuencia interesante, si elegimos $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{3}$ en la ecuación (6.1), se pueden formar tanto los patrones cuadrados (utilizando los números de onda 1, $\sqrt{2}$) como los rectangulares (usando los números de onda 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$). Y además ambos tienen la misma energía.

Sin embargo, si elegimos los números de onda inestables de forma tal que: $q_1 = 1$, $q_2 \neq \sqrt{2}$ y $q_3^2 = q_1^2 + q_2^2$, eliminamos la posibilidad de obtener patrones cuadrados quedando como posibilidades los patrones rectangulares, los hexagonales y las bandas. En la figura 6.4 se presenta un 'diagrama de fase' donde se muestran los intervalos en que se presentan dichos patrones. Los valores de transición son $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$.

Es importante hacer notar que los rectángulos, hexágonos y las bandas pueden competir con patrones más complejos que no se consideran en el presente análisis.

6.2 Resultados numéricos

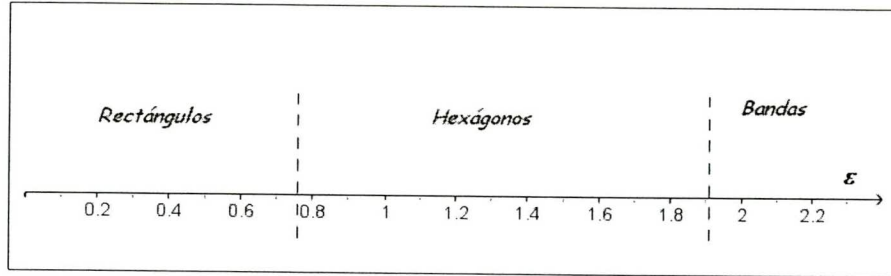


Figura 6.4: ‘Diagrama de fase’ obtenido por medio de un análisis de amplitud y energía, considerando patrones rectangulares, hexagonales y de bandas. Se muestran los intervalos de estabilidad con respecto a ϵ . Los valores de transición son: $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$

6.2. Resultados numéricos

Para mostrar la estabilidad de cuadrados y rectángulos, resolveremos la ecuación (6.1), utilizando la misma metodología de los capítulos anteriores y el algoritmo descrito en el apéndice D. Es decir, consideramos una malla cuadrada de 256×256 con un paso espacial de: $dx = 0.4$ y un temporal de $dt = 1.0$. Después de aprox 1000 iteraciones, un tiempo de procesamiento de aproximadamente 10 minutos y como condición inicial un patrón de cuadros y uno de hexágonos, encontramos que ambos patrones son suficientemente estables hasta aproximadamente $\epsilon = 1,5$ (ver la figura 6.5).

Ahora consideramos los números de onda: $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{5}$ y $q_3 = \sqrt{6}$ y resolvemos la ecuación (6.1) con condiciones iniciales aleatorias. Encontramos que el patrón resultante, después de aprox 2000 iteraciones y un tiempo de procesamiento de aprox. 20min, fue (a diferencia del de la figura (5.5)), un patrón rectangular, ver la figura 6.6.

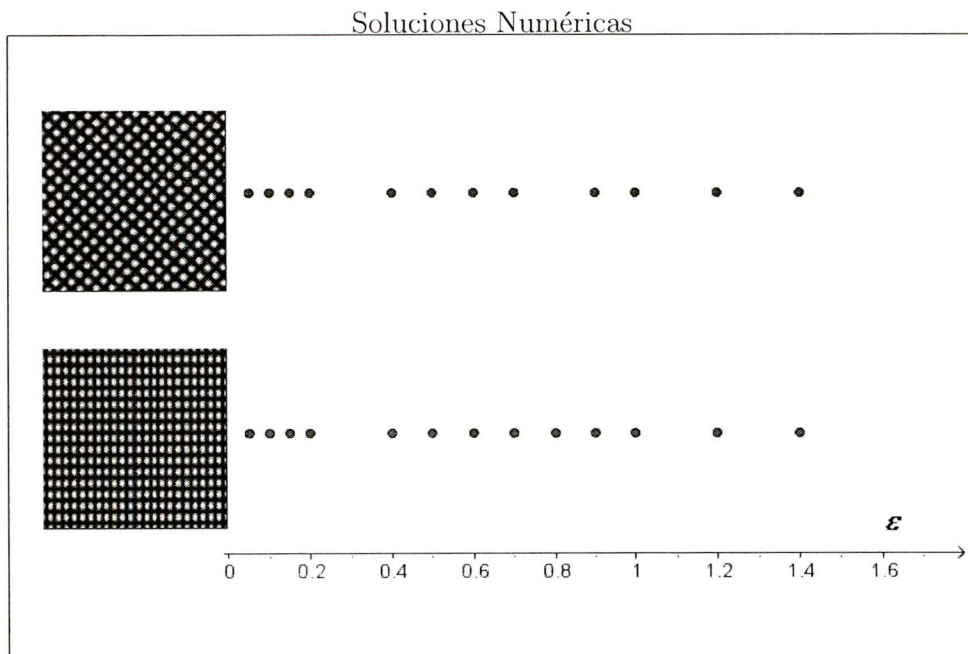


Figura 6.5: Resultados que se obtienen tomando un patrón de rectángulos y de cuadros (los de la izquierda) como condición inicial, se consideró $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{2}, q_3 = \sqrt{3}$. Obsérvese que ambos patrones son estables para toda ϵ indicada. Cada punto representa un resultado numérico.

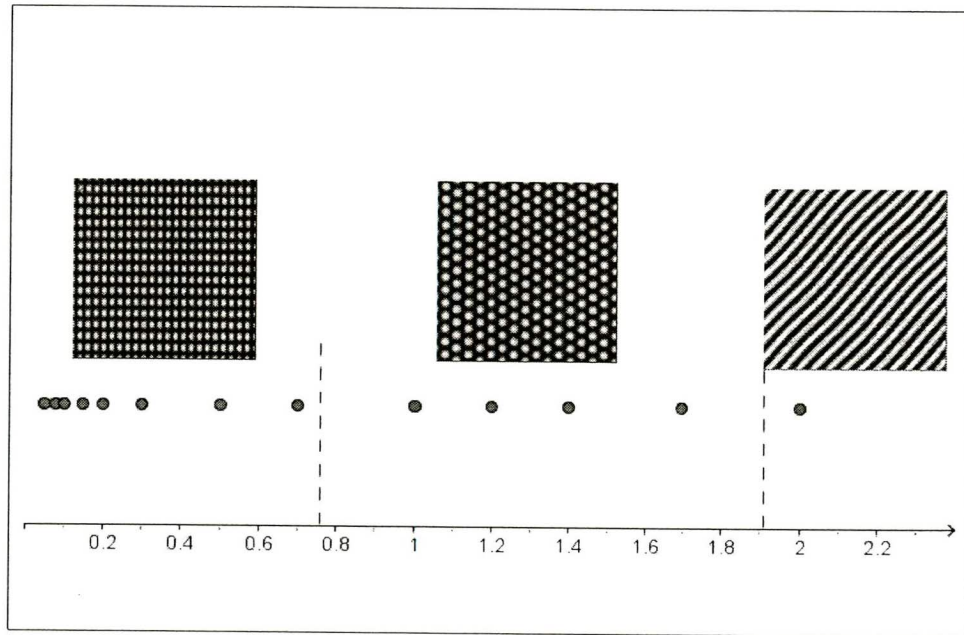


Figura 6.6: Resultados numéricos que se obtienen considerando un patrón inicial al azar, con números de onda $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{5}, q_3 = \sqrt{6}$, cada punto es una solución numérica. Obsérvese que esta figura es similar a la 5.5, pero los cuadros se sustituyen por rectángulos. las líneas punteadas son los valores de transición obtenidos por medio del análisis energético. Los valores de transición son: $\epsilon = 0.76$ y $\epsilon = 1.91$

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

Como se presentó en la introducción, en este trabajo se estudió una familia de patrones geométricos, modelados mediante la ecuación de Swift-Hohenberg y generalizaciones, tales como: no linealidades cuadráticas y de varios modos inestables. En este trabajo se ha mostrado que tales modelos permiten generar patrones con simetrías más complejas que los clásicos hexágonos y bandas.

Para verificar esta afirmación se obtuvieron, en cada caso, las ecuaciones de amplitud y el funcional de energía. Con el propósito de comparar, se resolvió la ecuación respectiva, utilizando para ello una técnica pseudoespectral.

En el caso de la ecuación de Swift-Hohenberg generalizada con un modo, comprobamos, mediante las herramientas señaladas, que los patrones de bandas y de hexágonos son soluciones estables de dicha ecuación. Encontramos también que para valores de ϵ pequeños el primer patrón en emerger es el de hexágonos y posteriormente, aumentando el valor de ϵ aparecen las bandas.

Aún cuando este era un resultado conocido, lo corroboramos para poder probar nuestros métodos de análisis.

Una vez comprobado lo anterior, se verificó que la ecuación de SHG con dos modos ($q_1 = 1, q_2 = 2 \cos \pi/12$) reproducía adecuadamente los cuasipatrones dodecagonales, tal como lo muestran Lifshitz y Petrich [10]. Sin embargo encontramos un error en sus resultados sobre la estabilidad que reportan [10]. Nosotros encontramos (también) que los cuasipatrones dodecagonales son una solución estable, pero que tienen un intervalo de estabilidad menor. Ellos reportan: $\epsilon < 0,087$ y nosotros $\epsilon < 0,023$.

Usando este mismo modelo (ecuación de SHG con dos modos) comprobamos que también produce adecuadamente el patrón cuadrado, usando para ello los números de onda $q_1 = 1$ y $q_2 = \sqrt{2}$. Encontramos que dicho patrón representa una solución estable en un intervalo de valores de ϵ de entre 0 y 0,76 aproximadamente. Comprobamos este resultado resolviendo numéricamente la ecuación respectiva y considerando condiciones iniciales aleatorias. Sin embargo cuando el patrón inicial es el de cuadros, la solución es estable para todo el rango de valores de ϵ considerado. Es importante destacar que este análisis de patrones cuadrados no está reportado en la literatura especializada del tema.

Utilizando la idea del análisis para el patrón de cuadrados, propusimos una nueva generalización a tres modos (ecuación de SHG con tres modos), con $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{2}$ y $q_3 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, para estudiar el caso de patrones rectangulares. Una simetría no estudiada anteriormente.

Encontramos que no hay distinción fundamental entre los patrones rectangulares y los cuadrados. De hecho, si elegimos 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, ambos pueden coexistir. Pero si utilizamos cualquier otra combinación de números de onda: $q_1 = 1, q_2 \neq \sqrt{2}$ y $q_3^2 = q_1^2 + q_2^2$,

se pueden tener patrones rectangulares como solución mas estables que los hexágonos y las bandas.

Un perspectiva interesante que se sigue de los resultados de este trabajo, es que: dadas las semejanzas entre los patrones periódicos y los arreglos cristalinos de átomos y moléculas, se abre la posibilidad de aplicar la teoría de formación de patrones en algunos problemas de materia condensada que son complicados de tratar con técnicas convencionales. Ver por ejemplo [19] y [20].

Apéndice A

Vectores propios de un operador diferencial lineal

Considera la ecuación diferencial parcial linealizada:

$$\partial_t w = \mathcal{J}[w] \tag{A.1}$$

Donde \mathcal{J} es el operador jacobiano, y $w = w(x, t)$.

El operador puede visualizarse como una matriz (como en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias), pero de dimensión infinita.

Si ésta ecuación lineal tiene coeficientes constantes, es válido el principio de superposición y es invariante ante translaciones:

- Si W_1 y W_2 son soluciones, entonces $aW_1 + bW_2$ es también solución.
- $\partial_t(W + a) = \partial_t W = \mathcal{J}[W + a] = \mathcal{J}[W]$

con a una constante.

Para poder encontrar una solución particular, lo que tenemos que hacer es obtener las funciones y valores propios del operador jacobiano: V_j y σ_j (con $j = 1, 2, \dots$) respectivamente.

Suponte que podemos hacerlo, esto significa que se cumple:

$$\mathcal{J}[V_j] = \sigma_j V_j \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, sea $W_j(x, t) = A_j(t)V_j(x)$ una solución de la ecuación (1), lo que significa que:

$$\partial_t (A_j(t)V_j(x)) = \mathcal{J}[A_j(t)V_j(x)] \quad (\text{A.3})$$

Derivando y sustituyendo la ecuación de valores propios A.2, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dt} V_j &= A_j \mathcal{J}[V_j] = A_j \sigma_j V_j \\ \Rightarrow \frac{dA_j}{dt} &= \sigma_j A_j \\ \Rightarrow A_j &= A_j(0) e^{\sigma_j t} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ahora debemos encontrar las funciones propias, para eso utilizaremos la siguiente propiedades de los operadores [21]:

- *Teorema: Sean los operadores A, B .
Si los operadores conmutan, esto es si:*

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

\Rightarrow tienen un conjunto común de funciones propias.

Por otro lado un operador diferencial que es invariante ante translaciones, como es nuestro caso, se puede escribir como:

$$J = a_0 + a_1 \partial_x + a_2 \partial_x^2 + \dots$$

De esta forma, podemos ver que el jacobiano conmuta con el operador generador de translaciones $T = \partial_x$:

$$\begin{aligned}
(JT)[W] &= \{a_0 + a_p \partial_x + a_2 \partial_x^2 + \dots\} \partial_x W \\
&= a_0 \partial_x W + a_1 \partial_x^2 W + a_2 \partial_x^3 W + \dots \\
&= \partial_x \{a_0 W + a_1 \partial_x W + a_2 \partial_x^2 W + \dots\} \\
&= (TJ)[W]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Y como las funciones propias del operador $T = \partial_x$ son:

$$T[V(x)] = \partial_x V = \mu V \quad \rightarrow V(x) = e^{\mu x}$$

Entonces las funciones propias del operador jacobiano J son:

$$\mathcal{J}[V_j] = \sigma_j V_j \quad \rightarrow V_j(x) = e^{\mu x} \quad , \mu \in \mathcal{C} \tag{A.6}$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación A.1, tiene la forma:

$$W_q(x, t) = A_q(0) e^{\sigma_q t} e^{iqx} \tag{A.7}$$

Donde se ha sustituido $\mu = iq$, con $q \in \mathcal{C}$

Para encontrar la solución general es importante notar que no se pueden utilizar todos los q, s en su construcción, ya que dicha solución tiene que satisfacer las condiciones de frontera del problema.

Si suponemos condiciones de frontera periódicas:

$$W(x + L, t) = W(x, t) \quad \Rightarrow \quad e^{iq(x+L)} = e^{iqx}$$

De donde: $q_n = \frac{2\pi}{L_x} n$, con n entero.

La solución general es:

$$w(x, t) = \sum_n A_{q_n}(0) e^{\sigma_{q_n} t} e^{iq_n x} \quad (\text{A.8})$$

Fisicamente esta perturbación se puede considerar como una superposición de ondas estacionarias cuyas amplitudes se modifican de acuerdo a la relación de dispersión σ_q .

Apéndice B

Alternativa de Fredholm

- Teorema [21]: Sea L un operador lineal acotado, y $f \in \mathcal{C}$ una función continua, entonces la ecuación:

$$\mathcal{L}u = f \tag{B.1}$$

satisface alguna de las siguientes alternativas:

- La ecuación inhomogénea (B.1) tendrá una única solución, siempre que la ecuación homogénea $\mathcal{L}u = 0$ tenga solamente como solución la trivial: $u = 0$
- La ecuación homogénea $\mathcal{L}u = 0$ y su adjunta $\mathcal{L}^\dagger v = 0$ tienen n soluciones linealmente independientes, con $n \in \mathbb{Z}^+$. En este caso la ecuación $\mathcal{L}u = f$ tiene una solución si y solo si

$$\langle f, v \rangle = 0$$

para cada v que satisfaga: $\mathcal{L}^\dagger v = 0$

El operador lineal adjunto se define por medio de la relación implícita:

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}^\dagger v \rangle$$

El producto interno $\langle u, v \rangle$ esta dado por:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \bar{v} dx$$

,

Donde: Ω es todo el dominio y la barra arriba indica conjugado complejo.

Claramente es la segunda de las alternativas la que se aplica en nuestro problema de análisis debilmente no lineal del capítulo 3, en el cual necesitamos resolver la ecuación:

$$\mathcal{L}_c \psi_{3/2} = \mathcal{L} \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3 \quad (\text{B.2})$$

Con: $\mathcal{L}_c = (q_c^2 + \partial_x)^2$ y $\mathcal{L} = 1 - \partial_T - (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2)^2$ operadores lineales.

Observa que el operador diferencial lineal \mathcal{L}_c es autoadjunto por lo que la función $e^{iq_c x}$ pertenece a su núcleo: $\mathcal{L}_c^\dagger [e^{iq_c x}] = 0$.

Por lo tanto la ecuación (B.2) tendrá solución para $\psi_{3/2}$, siempre que:

$$\langle \mathcal{L} \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3, e^{iq_c x'} \rangle = 0$$

En otras palabras, cuando:

$$\int_x^{x+\lambda_0} [\mathcal{L} \psi_{1/2} - \psi_{1/2}^3] e^{-iq_c x'} dx' = 0 \quad (\text{B.3})$$

Observa que el dominio de integración, en una dimensión, es en la práctica de $x \rightarrow x + \lambda_0$, donde $\lambda_0 = \frac{2\pi}{q_c}$.

Apéndice C

Ecuaciones de amplitud y energía para un patrón de dodecágonos

Aplicando el mismo método que se utilizó en los patrones hexagonal y de cuadrados, encontraremos las ecuaciones de amplitud para el patrón dodecagonal.

En otras palabras, encontraremos los términos resonantes que se producen al sustituir la solución (5.13) en la ecuación (5.1):

Para A_1 tenemos que identificar los términos que son proporcionales a $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$, para B_1 los que son proporcionales a $e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x}}$, y así sucesivamente.

A partir de la figura 5.6, y si solamente consideramos la suma de dos vectores, encontramos que cada vector del anillo exterior se pueden obtener mediante 4 combinaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, & \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_5, & \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_5, & \mathbf{k}_1 &= -\mathbf{k}_6 + \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, & \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_6, & \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_6, & \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4, & \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_1, & \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_4 + \mathbf{q}_1, & \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 \mathbf{k}_6 &= \mathbf{q}_6 - \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{k}_6 = -\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4, \quad \mathbf{k}_6 = \mathbf{k}_4 + \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{k}_6 = \mathbf{k}_5 - \mathbf{q}_3 \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

De la misma forma, cada vector del anillo interior se forma por medio de 4 combinaciones de 2 vectores.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_1 = -\mathbf{k}_6 + \mathbf{q}_6 \\
 \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_6, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 \\
 \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_6, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_4, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 \\
 & \dots \\
 \mathbf{q}_6 &= -\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4, \quad \mathbf{q}_6 = -\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_6 = \mathbf{k}_6 + \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_6 = \mathbf{k}_5 - \mathbf{q}_5 \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Usando la relación: $(\sum_i a_i)^2 = \sum_i a_i^2 + 2 \sum_{i=j} a_i a_j$, obtenemos de las relaciones C.1, los términos resonantes generados por ψ^2 para las amplitudes A_i del anillo exterior:

$$\begin{aligned}
 A_1 &: 2gB_1B_2 + 2gA_3\bar{A}_5 + 2gA_2\bar{B}_5 + 2g\bar{A}_6B_4 \\
 A_2 &: 2gB_2B_3 + 2gA_4\bar{A}_6 + 2gA_3\bar{B}_6 + 2gA_1B_5 \\
 & \dots \\
 A_6 &: 2gB_6\bar{B}_1 + 2g\bar{A}_2A_4 + 2gA_4B_1 + A_5\bar{B}_3
 \end{aligned}$$

De forma análoga obtenemos los términos resonante cuadráticos, para las amplitudes del anillo interior B_i .

Para obtener los términos resonantes producidos por ψ^3 , necesitamos determinar la suma de tres vectores que den como

resultado un vector dado, ya sea externo (\mathbf{k}_i), o interno \mathbf{q}_i . Partimos de cuando \mathbf{k}_i esta formado de dos vectores (como arriba) y cada sumando lo sustituimos por dos más.

De esta forma se tiene que \mathbf{k}_1 y \mathbf{q}_1 se pueden expresar de la forma:

\mathbf{k}_1 es igual a:

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_6, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5 \\ & \mathbf{q}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4, \quad \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_6 + \mathbf{q}_6, \quad \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_6 - \mathbf{q}_5, \quad \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_6 - \mathbf{q}_3 \\ & -\mathbf{k}_5 + \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_3, \quad -\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_6, \quad \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{q}_4, \quad -\mathbf{q}_5 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_6, \end{aligned}$$

además de las identidades triviales:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2. \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

\mathbf{q}_1 es igual a:

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_6 - \mathbf{q}_4, \quad \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_3 \\ & -\mathbf{q}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_5, \quad -\mathbf{q}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_5, \quad -\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_6 + \mathbf{q}_4, \quad -\mathbf{k}_6 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\ & -\mathbf{k}_6 + \mathbf{k}_5 - \mathbf{q}_5, \quad \mathbf{q}_6 + \bar{\mathbf{k}}_5 + \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{q}_6 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4, \quad \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_5 - \mathbf{q}_4, \end{aligned}$$

además de las identidades:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2. \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_i + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

Para los otros vectores hacemos lo mismo.

Usando la relación:

$$\left(\sum_j a_j\right)^3 = \sum_j a_j^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + 6 \sum_{i \neq j \neq h} a_i a_j a_h$$

obtenemos los terminos resonantes de ψ^3 y específicos del patrón dodecagonal:

■ Para A_1 son:

$$(C.3)$$

$$\begin{array}{cccc} 6B_1B_4\bar{B}_6, & 6B_2B_3\bar{B}_5, & 6A_3\bar{B}_6\bar{B}_5, & 6\bar{A}_5A_2B_6 \\ 6B_1\bar{A}_4\bar{A}_5, & 6B_2A_3\bar{A}_4, & 6A_3\bar{A}_6\bar{B}_3, & 6\bar{B}_5A_4\bar{A}_6 \\ 6B_1A_2\bar{B}_3, & 6B_2\bar{A}_6B_6, & 6\bar{A}_5B_4B_3, & 6A_2B_4\bar{A}_4 \end{array}$$

■ Para B_1 son:

$$(C.4)$$

$$\begin{array}{cccc} 6A_1B_6\bar{B}_4, & 6A_1\bar{A}_4A_5, & 6A_1\bar{A}_2B_3, & 6B_6A_2\bar{A}_4 \\ 6\bar{B}_2A_3\bar{A}_5, & 6\bar{B}_2A_2\bar{B}_5, & 6\bar{B}_2\bar{A}_6B_4, & 6A_3\bar{B}_5\bar{B}_4 \\ 6\bar{A}_6\bar{A}_2A_3, & 6\bar{A}_6A_5\bar{B}_5, & 6B_6\bar{A}_5B_3, & 6\bar{A}_4B_4B_3 \end{array}$$

Desde luego hay que agregar las que provienen de las identidades triviales:

$$\begin{array}{lll} 3 & A_1\bar{A}_1A_1, & 3A_2\bar{A}_2A_2, & 3A_3\bar{A}_3A_2, \dots \\ 6 & A_1\bar{A}_1A_2, & 6A_1\bar{A}_1A_3, & 6A_1\bar{A}_1A_4, \dots \\ & \dots & & \\ 3 & B_1\bar{B}_1B_1, & 3B_2\bar{B}_2B_2, & 3B_3\bar{B}_3B_2, \dots \\ 6 & B_1\bar{B}_1B_2, & 6B_1\bar{B}_1B_3, & 6B_1\bar{B}_1B_4, \dots \\ & \dots, & etc. & \end{array}$$

Finalmente las ecuaciones para las amplitudes quedan de la forma:

Para A_1 :

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 &= \epsilon A_1 + 2gB_1B_2 + 2gA_3\bar{A}_5 + 2gA_2\bar{B}_5 + 2g\bar{A}_6B_4 \\ &+ \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 A_1 - \left(3|A_1|^2 + 6 \sum_{i=2}^6 |A_i|^2 + 6 \sum_{i=1}^6 |B_i|^2 \right) A_1 \\ &- \{ \text{la suma de los términos C.3} \} \end{aligned}$$

Para B_1 :

$$\begin{aligned} \partial_t B_1 &= \epsilon B_1 + 2gA_1\bar{B}_2 + 2gA_6\bar{B}_6 + 2gB_3\bar{B}_5 + 2gA_3\bar{A}_4 \\ &+ \left(\partial_{x_1} - \frac{i}{2k_c} \partial_{y_1}^2 \right)^2 B_1 - \left(3|B_1|^2 + 6 \sum_{i=2}^6 |B_i|^2 + 6 \sum_{i=1}^6 |A_i|^2 \right) B_1 \\ &- \{ \text{la suma de los términos C.4} \} \end{aligned}$$

De la misma forma se obtienen las otras ecuaciones que faltan, además de las conjugadas.

Las ecuaciones para A_i son equivalentes entre si, y lo mismo para las de B_i . Suponemos por simetría que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A$ y $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B$, con A, B reales. Entonces el sistema de ecuaciones que nos proporcionará las soluciones estacionarias y uniformes queda como:

$$\begin{aligned} \epsilon A + 2g(A^2 + B^2) + 4gAB \\ - (33A^3 + 12B^3 + 60AB^2 + 36A^2B) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \epsilon B + 2g(A^2 + B^2) + 4gAB \\ - (33B^3 + 12A^3 + 60A^2B + 36AB^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Obsérvese que estas ecuaciones son las mismas si intercambio A por B o viceversa.

Por otro lado, de la misma forma que ya se describió en diversos capítulos, las ecuaciones de amplitud se pueden escribir derivando una funcional de energía, la cual en este caso, después de un largo cálculo, esta dada por:

$$F_{dode} = -6\epsilon (A^2 + B^2) - 8g(A + B)^3$$

$$\begin{aligned} &+ 3(33A^4 + 33B^4 + 72A^2B^2) \\ &+ 6(26B^3A + 24A^3B + 24A^2B^2) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Donde se ha utilizado: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A$
y $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B$, con A y B soluciones
del sistema C.5 y C.6.

Apéndice D

Método numérico

El método numérico empleado aquí para resolver la ecuación de Swift-Hohenberg y sus diversas generalizaciones para uno, dos y tres modos, fue desarrollado por Cross et al. en 1994 [13]. Ellos utilizaron una técnica pseudoespectral y algo así como un método ‘predictor corrector’ que ahora explicaremos.

Por simplicidad ilustraremos el método para un modo, en el entendido que para los otros modos es completamente similar.

Sea la ecuación de Swift-Hohemberg:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (\nabla^2 + 1)^2 \psi + \psi^2 - \psi^3 \quad (\text{D.1})$$

Iniciemos suponiendo que la solución que queremos es real, y definamos su transformada de Fourier como:

$$\tilde{\psi}(q_x, q_y, t) = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \psi(x, y, t) e^{-iq_x x} e^{-iq_y y} \quad (\text{D.2})$$

Donde L_x y L_y son las dimensiones del sistema considerado, en las direcciones x e y .

Si considere una malla rectangular de dimensiones $L_x \times L_y$ y discretizamos las posiciones x y y :

$$x_i = \frac{(i-1)L_x}{N_x} \quad y_j = \frac{(j-1)L_y}{N_y}$$

donde $i = 1, \dots, N_x$; $j = 1, \dots, N_y$

Sobre dicha malla $\tilde{\psi}$ se define como:

$$\tilde{\psi}(q_x, q_y, t) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \psi(x_i, y_j, t) e^{-iq_x x} e^{-iq_y y} \quad (\text{D.3})$$

Observa que los numeros de onda deben estar restringidos al conjunto

$$q_x = \frac{2\pi i}{N_x} \quad \text{y} \quad q_y = \frac{2\pi j}{N_y}$$

con: $-N_x/2 \leq i \leq N_x/2$ y $0 \leq j \leq N_y/2$

Esto último es consecuencia de de que $\tilde{\psi}(-q) = \tilde{\psi}(q)$, siendo $\psi(x)$ real.

Ahora considera la ecuación de Swift-Hohemberg escrita de la siguiente forma:

$$\partial_t \psi = \epsilon \psi - (\nabla^2 + 1)^2 \psi + N(\psi) \quad (\text{D.4})$$

Donde el término $N(\psi) = \psi^2 - \psi^3$ se refiere a la parte no lineal:

Tomando la transformada de fourier de ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\partial_t \tilde{\psi} = \alpha \tilde{\psi} + \tilde{N}(\psi) \quad (\text{D.5})$$

Donde: $\alpha = \epsilon - [1 - (q_x^2 + q_y^2)]^2$

La transformada del término no lineal se realiza por medio de la técnica pseudoespectral, en el cual las derivadas se realizan en el espacio de fourier y los productos en el espacio físico. En este caso no tenemos derivadas.

Multiplicando ambos lados de la ecuación D.5 por un factor de integración apropiado ($e^{-\alpha t}$) e integrando, obtenemos:

$$e^{-\alpha t} \tilde{\psi} = \int_t^{t+\Delta t} \tilde{N}(\tilde{\psi}) e^{-\alpha t} dt \quad (D.6)$$

Con el proposito de integrar los terminos no lineales explicitamente, supondremos que el termino no lineal se puede aproximar, en el intervalo $t \leq t' \leq t + \Delta t$, por un desarrollo en serie de Taylor de primer orden:

$$\tilde{N} \approx \tilde{N}_0 + \tilde{N}_1(t' - t)$$

con:

$$\tilde{N}_0 = \tilde{N}(\psi(t)) \quad (D.7)$$

$$\tilde{N}_1 = \frac{\tilde{N}(\psi(t + \Delta t)) - \tilde{N}(\psi(t))}{\Delta t} \quad (D.8)$$

Realizando la integración podemos calcular de manera aproximada $\tilde{\psi}(t + \Delta t)$ conociendo $\tilde{\psi}(t)$, para todos los pasos (q_x, q_y) :

$$\tilde{\psi}(t + \Delta t) = \tilde{\psi}(t) e^{\alpha \Delta t} + \tilde{N}_0 \left[\frac{e^{\alpha \Delta t} - 1}{\alpha} \right] + \tilde{N}_1 \left[\frac{e^{\alpha \Delta t} - 1 - \alpha \Delta t}{\alpha^2} \right] \quad (D.9)$$

Para evaluar \tilde{N}_1 usamos el valor de $\tilde{\psi}(t + \Delta t)$ obtenido de la misma ecuación, pero con $\tilde{N}_1 = 0$ [13].

Finalmente realizamos la transformada inversa de Fourier para obtener

$$\tilde{\psi}(t + \Delta t)$$

Este algoritmo es rápido (se pueden emplear valores de Δt del orden de 1) y preciso, comparado con otros algoritmos que utilizan método de Euler y diferencias finitas.

Apéndice E

Programa en FORTRAN

Aquí presentamos las rutinas desarrolladas más importantes:

```
Programa principal.  
include "imagen.f"  
include "fftr2d.f"  
include "derivalif.f"  
program main  
implicit none  
integer nmax, nmaxsqrt,nj  
parameter (nmax = 512)  
parameter (nmaxsqrt = 32)  
real*8 dx,dt,epsilon,alf,alf2  
integer ip(0 : nmaxsqrt + 1), n1, n2, i,j,t,nt,tt  
real*8 a(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1), w(0 : nmax * 3 / 2 - 1),  
1 noli1(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1),  
1 noli2(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1),  
1 a-t(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1),  
1 A-mas(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1)  
character*30 ima  
write (*, *) 'Iteraciones ? '
```

```
read (*, *)nt
ip(0) = 0, nj= 256, n1=nj, n2=nj, epsilon =1.0
dx= .4 dt= 0.1
Cc matrix de derivada eps-(1-(kx**2+ky**2)**2
call derivalif(dx,nj,epsilon,A-mas)
Ccc datos iniciales
call putdata2d(nmax, n1, n2,dx, a)
do i=0,n1-1
do j=0,n2-1
write(7,*)i,j,a(i,j)
end do
end do
c inicia loop temporal
do tt=1, nt
C construye la parte no lineal y transforma
call nolineal(n1,n2,a,noli1)
C transforma los datos de entrada
call fftr2d(nmax, n1, n2, 1, a, ip, w)
C calcula primera parte del algoritmo de Cross
alf=0.
do i=0, n1-1
do j=0, n2-1
alf=A-mas(i,j)
a(i,j)= a(i,j)*exp(dt*alf)+ noli1(i,j)*(exp(alf*dt)- 1.)/alf
end do
end do
C copio y transformo
do i=0, n1-1
do j=0, n2-1
a-t(i,j)=a(i,j)
```

```

end do
end do
call fftr2d(nmax, n1, n2, -1, a-t, ip, w)
Cc normalizas
do i=0,n1-1
do j=0,n2-1
a-t(i,j)=a-t(i,j)*2.d0/(n1*n2)
end do
end do
call nolineal(n1,n2,a-t,noli2)
Cc segundo termino de Cross
alf2=0.
do i=0,n1-1
do j=0,n2-1
alf2=A-mas(i,j)
a(i,j)= a(i,j)+
1 (noli2(i,j)-noli1(i,j))*(exp(alf2*dt) - 1.- alf2*dt)/(dt*alf2**2)
end do
end do
c regresa al espacio físico
call fftr2d(nmax, n1, n2, -1, a, ip, w)
Cc normalizas
do i=0,n1-1
do j=0,n2-1
a(i,j)=a(i,j)*2.d0/(n1*n2)
end do
end do
end do
ima='tres.pgm'
call image(ima,nj,a)

```

```
end
subroutine putdata2d(n1max, n1, n2,dx, a)
integer n1max, n1, n2, j1, j2, seed
real*8 dx
real*8 a(0 : n1max - 1, 0 : *), drnd
seed = 0
do j2 = 0, n2-1
do j1 = 0, n1-1
a(j1, j2) = drnd(seed)
Ccc a(j1, j2) = 0.5*(cos(sqrt(2.)*dx*j1)+cos(dx*j2))
end do
end do
end
! random number generator, 0 <= drnd < 1
real*8 function drnd(seed)
integer seed
seed = mod(seed * 7141 + 54773, 259200)
drnd = seed * (1.0d0 / 259200)
end
subroutine nolineal(n1,n2,aa,nli)
implicit none
integer nmax, nmaxsqrt,nj
parameter (nmax = 512)
parameter (nmaxsqrt = 32)
integer ip(0 : nmaxsqrt + 1), n1, n2, i,j
real*8 aa(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1), w(0 : nmax * 3 / 2 - 1),
1 nli(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1)
ip(0) = 0
do i=0, n1-1
do j=0, n2-1
```

```

nli(i,j)= aa(i,j)**2 - aa(i,j)**3
end do
end do
call fftr2d(nmax, n1, n2, 1, nli, ip, w)
return
end
Rutina para obtener la matriz de derivadas
subroutine derivalif(dx,nj,epsilon,A-mas)
implicit none
integer*4 nj,nmax
parameter( nmax=512 )
Integer*4 l,i,j
Real*8 alfa(0 : nmax - 1),beta(0 : nmax - 1)
Real*8 dx, pi,epsilon,q,q1,q2,C
real*8 A-mas(0 : nmax - 1, 0 : nmax - 1)
pi=3.141592653589793 q1 =sqrt(2.) q2 =sqrt(3.)
C=15.
do l = 0, nj/2
if (l .eq. 0 )then
beta(0) = 2.0 * l * pi /(dx*nj)
else
if (l .eq. nj/2 )then
beta(1) = 2.0 * l * pi / (dx * nj)
else
beta(2 * l) = 2.0 * l * pi / (dx * nj)
beta(2 * l + 1) = 2.0 * l * pi / (dx * nj)
end if
end if
end do
do l=0,nj-1

```

```
if (l.le.nj/2) then
  alfa(l)=2.0*pi*(l)/(nj*dx)
else
  alfa(l)=-2.0*pi*(nj-l)/(nj*dx)
end if
end do
do i=0,nj-1
  do j=0,nj-1
    A-mas(i,j)= epsilon -
    1 C*(1.- (alfa(j)**2 + beta(i)**2))**2 * ( q1**2 -(alfa(j)**2
+
1 beta(i)**2) )**2*(q2**2- (alfa(j)**2 + beta(i)**2))**2
  end do
end do
return
end
```

Bibliografía

- [1] Swift J.B. and P.C. Hohenberg, ‘Hydrodynamics fluctuations at the convective instability’. *Phys. Rev A* **15** 319 (1977).
- [2] Ball P., *The self made tapestry*. Oxford University Press. New York,(2004).
- [3] Manneville P., *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press. USA, (1990).
- [4] Rabinovich M.I., A.B. Ezersky and P.D. Weidman. *The dynamics of patterns*, World Scientific, USA, (2001).
- [5] Walgraef D. *Spatio-Temporal pattern formation*. Springer-Verlag, New York (1997).
- [6] Turing A. ‘The Chemical Basis of Morphogenesis’. *Philosophical Transactions of the Royal Society B* **37** 237,(1952)
- [7] Castets V., E. Dulos, J., Boissonade, and de Kepper P., ‘Experimental evidence of a sustained standing Turing type nonequilibrium chemical pattern’. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953, (1990).
- [8] Ouyang and Swinney H.L., ‘Onset and beyond Turing pattern formation. Chemical Waves and Patterns’. (*R. Kapral*

- and Kennet Showalter, eds.), *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands (1995).
- [9] Faraday M. . Philosophical Transactions of the Royal Society **121**, 299 (1831)
- [10] Lifshitz R. and D. M. Petrich. ‘Theoretical Model for Faraday Waves with Multiple-Frequency Forcing’. *Phys. Rev. Lett.* **79**,7 (1997).
- [11] Guckenheimer J. and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems and bifurcations of vectorial fields*. Applied Mathematical Sciences 42 Springer New York (2000)
- [12] Ahlers G., *Over Two Decades of Pattern Formation, a Personal Perspective*. Lecture Notes in Physics.,(1995).
- [13] Cross M.C. and Hohenberg P.C., ‘Pattern formation outside of equilibrium’,*Rev. Mod. Phys.*, **65** 851 (1993).
- [14] Newell A.C. and Whitehead A., *Journal of Fluid Mechanics.*, **38**,279 (1969).
- [15] Segel, A.C. ‘Distant side-walls cause slow amplitud modulation of cellar convection’. *J Fluid. Mech.*, **38**, 203 (1969).
- [16] Cross M.C.,D.Meiron and Yuhai Tu,‘Chaotic domains: A numerical investigation’. *Chaos.*, **4**,607 (1993).
- [17] Miles J. and D. Henderson, ‘Parametrically forced surface waves’, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, **22** 143, (1990).
- [18] Edwards W.S. and S. Fauve, ‘Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment’. *J. Fluid Mech*, **278** 123, (1994).

BIBLIOGRAFÍA

- [19] Boyer D. and Romeu D., 'Modeling grain boundaries in solid using a combined nonlinear and geometrical method'. *I.J. of Modern Physics B*, **27**, 19 (2005).
- [20] Elder K.R., M. Katakowski and Grant M. . *Phys. Rev.Lett.* **88**, 245701 (2002).
- [21] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and sons., (1978).

Encuadernaciones
Copilco

Print & Copy Shop

T E S I S

Medicina No. 37 P.B. Copilco Universidad
Coyoacan, C.P. 04360, México, D.F.



Tel. 5339-5699
Fax. 5658-1553

tesisopilco@hotmail.com

