UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRIA EN DINÁMICA NO LINEAL Y SISTEMAS COMPLEJOS

"***Dinámica regresiva en la agricultura***"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN DINÁMICA NO LINEAL Y SISTEMAS COMPLEJOS

PRESENTA:

LUIS ALBERTO QUEZADA TÉLLEZ

Director de Tesis

Dr. Carlos Islas Moreno

México, D.F. Junio 2012

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

CA Coordinación Académica

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO
COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS©

DINÁMICA REGRESIVA EN LA AGRICULTURA

Luis Alberto Quezada Téllez

2012

Índice general

DEDICATORIA.

Dedico esta tesis a mi madre *Micaela Téllez Cisneros*. También la dedico a mi familia por brindarme siempre su apoyo incondicional. A mi hermano Juan Miguel por sus consejos y cariño. A mis tíos y tías, así como a todos mis primos. A Carlos, a mis profesores y amigos que contribuyeron a mi formación académica. A Guadalupe por su apoyo.

Dedico esta tesis a la Maestría en Dinámica No Lineal y Sistemas Complejos, así como a la Universidad Autónoma de la Ciudad México.

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco a mi madre Micaela su paciencia y comprensión. Te agradezco la vida, tu educación y tu ejemplo. Fuiste una mujer sabia que comulgaste con el ejemplo, la solidaridad a tu familia y semejantes, que hicieron de mi el hombre que soy. No tengo palabras con que darte las gracias por todo lo que hiciste por mi en vida.(QEPD)

Agradezco a la Maestría en Dinámica No Lineal y Sistemas Complejos, así como a la UACM por darme la oportunidad de ser parte de su comunidad universitaria.

Agradezco de manera especial a Carlos Islas, profesor, amigo y hermano que siempre ha estado para alentarme y brindarme un oportuno consejo. Gracias por dejarme trabajar a tu lado y brindarme tu amistad. Sin tu apoyo -en todos los sentidos- este sueño no se hubiera podido hacer realidad.

Agradezco a todo su claustro académico de la maestría: José Luis, Fernando, Juan Luis, John, Felipe, Maruxa y Arezky. A mis sinodales Dr. Antonio Nido, Dr. Antonio Neme, Dra. Rocío Leonel y a la Dra. Betty Puga por su valiosos comentarios para mejorar mi investigación.

Agradezco al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (ICyTDF) por su apoyo económico en el proyecto (PI2010-47), así como a la beca de titulación que permitió concluir satisfactoriamente mi trabajo de investigación. Gracias al apoyo del instituto esta investigación ha sido enviada a la revista *Análisis Económico* de la UAM-A, la cual aparecerá en el siguiente número.

Agradezco a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México el apoyo económico para la impresión de este trabajo.

INTRODUCCIÓN.

En la actualidad existe una vasta literatura sobre la teoría del crecimiento económico. En las últimas décadas del siglo pasado, muchos economistas han centrado sus esfuerzos en formular una teoría que describa la mejor manera en que las naciones pueden incrementar sus producciones nacionales año tras año. Algunas recetas de política económica han sido sumamente exitosas, como es el caso de los países asiáticos; sin embargo estas mismas políticas que se han aplicado en países en vías de desarrollo no han corrido con la misma fortuna.

En la disciplina económica, el crecimiento económico resulta de vital importancia ya que tiene efectos positivos o negativos sobre el resto de las variables económicas. También encontramos investigaciones que critican a dichos modelos de crecimiento por su severa simplificación de la realidad y su aparente miopía al suponer que los recursos no renovables son infinitos.

En la Teoría Neoclásica se busca a ultranza una situación de equilibrio macroeconómico. El estado estacionario[1] en algunos modelos supone la convergencia de manera paulatina en un periodo de tiempo hacia el equilibrio. Pero si cuestionamos el criterio de convergencia, ¿qué pasaría si la dinámica es caótica o si la trayectoria genera un ciclo límite que impida a través del tiempo llegar a un estado en equilibrio?

A partir de la aparición de los ordenedaores en los años 70´s se crearon simulaciones donde se observaba el comportamiento de los Sistemas Complejos. Una inquietud que conllevo a esta investigación fue el conocer si los sistemas dinámicos en la economía se comportaban como los sistemas estudiados en otras disciplinas de las ciencias básicas.

A partir del modelo de crecimiento económico más simple como es el de Solow [40], encontramos diferentes modelos que analizan de manera cualitativa el comportamiento de la economía a través del tiempo con cierta combinación de factores productivos. Muchos de ellos toman *per se* que en algún momento el

[1] Equilibrio estacionario es la condición del modelo de Solow en que finaliza el aumento del capital reflejado en la ecuación de acumulación de capital per cápita, que termina con un capital fijo sin variaciones adicionales.

modelo convergerá al estado estacionario. En objetivo del trabajo es demostrar que algunos modelos pueden generar comportamientos caóticos no permitiéndoles llegar al estado estacionario. Para ello, se analiza la dinámica regresiva en un modelo de crecimiento económico, bajo la participación de la agricultura en la producción nacional (PIB) y la productividad misma del sector como el estudiado por Vesna D. Jablanovic [23].

La hipótesis que sostiene nuestra investigación es: un modelo de estilo logístico en dinámica progresiva que es caótico. Bajo otros supuestos económicos se presenta una modificación a dicho modelo que tendrá dinámica regresiva y donde encontraremos que el modelo también resulta caótico.

La dinámica regresiva ha sido estudiada en modelos macroeconómicos donde involucran fenómenos cuya dependencia del tiempo está dada en forma regresiva, es decir, modelos en el cual la variable está determinada por la expectativa futura o por su valor en el periodo de tiempo siguiente. Judy Kennedy, Brian Raines y David R. Stockman [26], entre otros autores, se han dedicado a estudiar las aplicaciones de los límites inversos. A través de esta herramienta topológica se permite determinar la estabilidad o inestabilidad de un sistema en dinámica regresiva. Una de estas aplicaciones es en el Modelo de Generaciones Traslapadas (OLG), que estudia el comportamiento agregado de economías formadas por dos o más generaciones de individuos que conviven al mismo tiempo. Otra de los modelos estudiados es el de Flujo de Efectivo (*Cash in advanced*). Muchos de estos modelos han demostrado que su dinámica regresiva se encuentra determinada por ciclos límite o por dinámicas caóticas.

Nuestro objetivo es analizar la dinámica de previsión perfecta y la dinámica regresiva del modelo de crecimiento económico. Los resultados encontrados se comparan con el modelo propuesto por Jablanovic. La investigación contiene cuatro capítulos: el primero de ellos destaca el crecimiento económico (PIB), la participación del sector agrícola en la producción nacional y la productividad agrícola a lo largo de la historia bajo distintas políticas económicas; cabe mencionar que en este capítulo se dan bases históricas que conllevan a tratar de modelar en sus distintas situaciones el crecimiento de una economía a partir de la participación del sector primario. Es decir, que aunque parece separado del proyecto a desarrollar, es impresindible porque analiza o rescata la problemática en este tema. El segundo capítulo se brinda un panorama de la teoría de los sistemas dinámicos, su estabilidad y los límites inversos; en el tercero capítulo se presentan los modelos propuestos por nuestra investigación bajo determinados supuestos; y por último se discuten los resultados obtenidos en nuestra investigación mencionando también los que concluye Jablanovic en [23].

Capítulo 1

Panorama Económico.

En este primer capítulo se analiza el crecimiento económico y la agricultura a lo largo de la historia. Iniciamos nuestro análisis desde la perspectiva mundial y luego hacemos énfasis en la situación económica de México durante el siglo XX. Se menciona cual ha sido la importancia del crecimiento económico, la participación del sector agrícola en la producción nacional, así como su productividad agrícola. Esta descripción del panorama económico nacional es de utilidad, ya que en el tercer capítulo los temas analizados ahora se consideran las variables económicas que formulan el modelo matemático, base central en nuestra investigación.

1.1. La economía y la agricultura en el Mundo

La agricultura ha sido una de las actividades económicas principales desde la aparición del Hombre en la tierra. Cuando el Hombre dejo de lado la vida nómada y se asentó en lugares específicos, es decir, una vez ya siendo sedentario, la caza y la recolección de frutos fueron desplazadas por las actividades agrícolas. En las antiguas sociedades, por ejemplo en el Imperio Romano no solamente esta actividad satisfacía la subsistencia de sus pobladores, sino también era utilizada para el comercio en los tianguis de la época.

En el caso del modo de producción primitivo o también conocido como de comunidad primitiva, los bienes que se producían en ella pertenecían solamente a la comunidad. Al igual que estos bienes producidos por la comunidad, los medios de producción y los instrumentos también formaban parte de dicha comunidad.

En este sistema, el comercio se encontraba limitado ya que nadie podía enajenar bienes que pertenecían no solamente a un individuo si no a una comunidad entera. Una de las principales características del sistema de producción primitivo y el esclavista, es que en el segundo ya aparece la propiedad privada siendo las mismas personas instrumentos de trabajo dentro de las relaciones sociales de producción. El feudalismo en Europa de la Edad Media aparece con especiales características el sistema, como la figura del señor feudal (dueño de la tierra) y los campesinos (dueños de su fuerza de trabajo). Ya para el sistema de producción capitalista la relación social de producción se modifica a "capitalista" y "proletario". Este sistema denota una estructura económica caracterizada por la propiedad privada de los medios de producción, lo que permite a sus detentadores concentrar en sus manos el excedente económico producido por la mayoría de los trabajadores asalariados.

En los últimos 40 años, la producción de alimentos se ha mantenido casi al mismo ritmo de crecimiento demográfico en el mundo, gracias a los altos rendimientos en la actividad así como a una mejor combinación de factores productivos, principalmente el gran incremento de tecnología que ha permitido tener producciones más abundantes. A nivel mundial los suministros de alimentos per cápita 23 % son más altos de lo que eran en 1961 y en esa misma fecha los precios reales eran un 65 % más bajos. Al aumentar el rendimiento en las tierras que se encuentran con mayor aptitud para la agricultura, los agricultores del mundo han podido destinar las reservas de tierra para otros propósitos.

A diferencia de los países desarrollados, la agricultura en América Latina se caracteriza por ganadores y perdedores. Por ejemplo, el crecimiento promedio para la década de los años noventa fue alrededor del 3 %, pero este crecimiento no fue para todos sus participantes. Los productores ganadores son aquellos que destinan sus mercancías al mercado externo. Los productos que han mostrado un crecimiento constante son los cereales, el café y la carne, por otro lado los productos como las frutas y los vegetales han mostrado en los últimos años un crecimiento mayor.

En el otro lado de los productores encontramos millones de pequeños agricultores latinoamericanos atrapados en una agricultura de muy bajo rendimiento y con altos niveles de pobreza. Principalmente estos agricultores producen para el mercado interno o de subsistencia. En el caso de la productividad del sector agrícola latinoamericano no ha seguido los mismos niveles que en el resto de las actividades económicas y muchos de sus trabajadores optan por la migración como salida a la pobreza. Aunque los niveles de urbanización en América Latina alcanzan un 75 %, las instituciones gubernamentales de cada nación e internacionales buscan iniciativas que promuevan incrementar la productividad en este sector y que influyan de manera positiva en el resto de la economía de cada sociedad [18].

En el Cuadro no. 1 del anexo se presenta el PIB agrícola para varios países medido en sus tasas de crecimiento promedio. Aunque para nuestro país se ha incrementado a lo largo de las décadas, este crecimiento ha sido insuficiente si lo comparamos con países latinamericanos como Costa Rica. En el caso de China, Estados Unidos y Chile su crecimiento agrícola ha sido mucho mayor que el de nuestro país y sostenido a lo largo del tiempo [19].

1.2. Breve descripción de la economía y la agricultura en México

Durante el siglo XX nuestro país enfrentó una gama muy diversa de políticas económicas. Algunas de estás políticas favorecieron de amplia manera el crecimiento económico y al sector agrícola, pero en la práctica sus resultados no reflejaron sus objetivos. A continuación se hace enfásis en lo más importante que se suscitó durante el siglo pasado y sus efectos económicos sobre la economía.

México ha sido uno de los países que adoptó el sistema capitalista a principios del siglo XX. El General Porfirio Díaz ejerció una importante inversión en infraestructura que permitió reactivar la economía en diversas áreas geográficas del país. En esta etapa, la agricultura representaba una actividad muy importante dentro de la economía nacional, al igual que el personal ocupado por dicha actividad.

A principios del siglo nuestra economía estaba orientada en abastecer el mercado externo con bienes y servicios de bajo valor agregado. Pero el modelo de sector primario exportador colapso por la crisis de 1929-1932[2]. Nuestra economía abastecía de bienes básicos a los Estados Unidos, ya que el país del norte estaba involucrado en la Primera Guerra Mundial por la cual requería de suficientes insumos para su sistema militar.

Para los siguientes años de nuestra historia el cambio de la

---

[2]La llamada Gran Depresión se originó en los Estados Unidos, a partir de la caída de la bolsa del 29 de octubre de 1929 (conocido como Martes Negro, aunque cinco días antes, el 24 de octubre, ya se había producido el Jueves Negro), y rápidamente se extendió a casi todos los países del mundo

reforma *Cardenista* fue espectacular. Para 1940 ya la mitad de las tierras agrícolas eran ejidales. Después de la reforma Cardenista los ejidatarios eran propietarios de más de la mitad de las mejores tierras agrícolas del país y representaban más de una quinta parte de la producción nacional [18].

Para el periodo comprendido entre 1940 y 1958 el sector primario creció a una tasa promedio del 5.8 %, y el subsector agrícola creció a un ritmo del 7 % anual. Fueron tres factores lo que promovieron dicho incremento: el primero, la reforma agraria rompio los estrangulamientos monopólicos y permitió incentivar los flujos de inversión sobre el subsector agrícola; en el segundo caso, la inversión en obras públicas, el caso de la irrigación permitió la diversificación de productos y el aumento de productividad; y el tercero, la estabilidad de los precios.

Ya a partir del año 1952 entra en vigor el modelo *Desarrollo Estabilizador*[3]. En este periodo se destaca el estímulo al sector privado nacional y el incentivo de manera prioritaria a la industria como motor del crecimiento económico. La tasa media de crecimiento del sector industrial alcanzó el 9 %, impulsando a

[3]Fue un modelo económico utilizado en México entre los años de 1952-1970. Las bases de este modelo radican en buscar la estabilidad económica para lograr un desarrollo económico continuo.

la economía nacional hasta tener un 6 % de crecimiento. Inicio simultáneamente el proceso de sustitución de importaciones más allá de los bienes de consumo, también el efecto alcanzó a los bienes intermedios y bienes de capital [18].

En aquel momento se esperaba que el favorable desarrollo industrial iba a ser capaz de estimular de manera similar el crecimiento de la agricultura y del resto de los sectores económicos. Otra manera de estimular el crecimiento agrícola fué a través de menores costos. Estos costos podrían contrarrestar los efectos negativos de las políticas de precios. Parte de los estimulos al sector fueron las grandes inversiones públicas hechas por el gobierno, así como la asistencia técnica y diversos mecanismos que permitieran reducir los costos de créditos, del riego y de los insumos utilizados dentro del proceso agrícola.

El efecto lo podemos ver en el Cuadro no. 2 del anexo, donde se cuantífca el Producto Interno Bruto nacional de 1960 a 1993 a precios de 1980 por actividad económica. Recordemos que una manera de computar la producción nacional es a través de la adición de los tres sectores económicos. Quizá en este gráfico no se observe a simple vista la disminución de la participación del sector primario, y en caso contrario, el incremento de la participación del sector terciario en la economía nacional.

También podemos observar en el Gráfico no. 1 del anexo el comportamiento de la producción. La trayectoria de la producción se ha incrementado casi de manera lineal, salvo en 1982 y 1986 donde se aprecia una disminución de la producción y cambio de trayectoria en la curva. Lo que es necesario destacar es que dentro del modelo estabilizador nuestra industria jugo un papel importante en la producción nacional.

Sin embargo, los elevados recursos que se canalizaron al sector agrícola como la inversión pública en infraestructura, los subsidios al mantenimiento, la operación en las obra de irrigación, los subsidios a la maquinaria y otros bienes de capital, las tasas preferenciales de crédito y más apoyos destinados a disminuir los costos de producción agrícolas, de ello sólo se beneficiaron un pequeño grupo de empresarios y productores. La gran mayoría de los productores que sus cosechas eran de temporal, se enfretaban a riesgos que no permitían que el sector tuviera un dinamismo importante y se reflejara en las variables económicas.

Esta política profundizó la polarización en el sector agropecuario beneficiando sólo a pocos agricultores privilegiados, ya que eran estos los que utilizaban en mayor medida la infraestructura y la tecnología disponible recibiendo mayor crédito y mayor proporción de los subsidios. Por el contrario, la mayor parte de los campesinos eran pequeños productores atrasados en su proceso productivo y por lo tanto recibían muy pocos estimulos. Esta política tenía un sesgo importante contrario a los pequeños productores y campesinos nacionales.

Uno de los principales factores que responden al lento crecimiento de la producción agrícola después de 1958 radica en el desempeño de la inversión privada. En general seguían los precios relativos teniendo un estancamiento por un largo periodo, provocando la descapitalización del sector a pesar de los intensos incrementos de la inversión pública y los subsidios. Los precios se veían por su parte influenciados por las altas tasas inflacionarías efecto de una política fiscal expansiva por parte del gobierno en turno.

En el Cuadro no. 3 se calcula la participación de los sectores económicos en la producción nacional. En ella podemos destacar la disminución de la participación del sector agrícola desde 1960. Aunque la política económica del modelo estabilizador dotó de infraestructura y otros recursos al campo mexicano, la producción no creció durante las siguientes décadas en decremento de la economía. Por el otro lado, el sector industrial y de servicios creció y se vio fortalecido antes las políticas que fomentaban la industrialización del país, mismos que podemos apreciar en los datos del Cuadro no. 3.

Al comparar el crecimiento de la inversión pública y el nivel de subsidios con el ritmo del progreso del producto sectorial se evidencía la ineficacia de estos mecanismos. Mientras los recursos públicos canalizados crecían en un 12.5 %, el producto sectorial sólo lo hacia en un 2.2 %. Desde mucho tiempo atrás de la crisis de deuda externa, la política agraria era claramente ineficaz, injusta, ineficiente e insostenible [17].

Además de los grandes costos para la economía nacional que esto represantaba, los resultados productivos eran mediocres y se incrementaba la inequitad. Aunque en los años setenta no se registraron cambios transcendentes en la política sectorial compensatoria ni en el rol de la agricultura en la economía nacional, es necesario brindar algunos elementos del contexto macroeconómico que tuvieron grandes repercusiones en la década siguiente.

Se muestra en el Gráfico no. 2 la participación de los sectores en la economía nacional, podemos enfatizar la tendencia positiva y creciente del sector tercieario, y una constante y baja participación del sector primario a lo largo del periodo señalado. En el Gráfico no. 3 se estudia la participación del sector agrícola en el PIB. Como habiámos comentado anteriormente la gráfica 3 constata la disminución del sector agrícola en la producción nacional. La insistencia en reanimar la agricultura a través del sector público dió como resultado un sistemático aumento en la participación relativa del Estado en el desarrollo sectorial.

Para 1973, la crisis petrolera y la respuesta a la política expansionista[4] aplicada por el gobierno para enfrentar dicha contracción, hizo que se rompiera la estabilidad fiscal y la estabilidad en los precios que se había mantenido. El déficit fiscal provocaba el aumento en la demanda agregada, lo que presionaba un déficit creciente en la cuenta corriente. Para mantener estos excesivos gastos, los requirimientos financieros en petrodólares así como un contexto mundial recesivo, trajeron como consecuencia el inicio del endeudamiento acelerado con el exterior.

Tanto la deuda externa pública como privada se duplicaron entre 1973 y 1975. Aunque la economía nacional mantenía altas tasas de crecimiento durante la crisis 1973-1974, la desconfianza

---

[4]Conjunto de criterios, lineamientos y directrices utilizados por el Estado para hacer crecer la actividad económica través del uso de los instrumentos de Política Económica que se consideren necesarios.

por parte de los agentes económicos hacia la incapacidad del gobierno por mantener el tipo de cambio nominal provocó la salida de capitales haciendo insostenible el desequilibrio externo y desencadenando la terrible devaluación de 1976 que llego a ser del 80 %. Para 1977, la economía mexicana se encontraba sin crecimiento y con inflación.

Después del fenómeno de estancamiento con inflación (estanflación) que culminó en la devaluación de la moneda nacional, la bonanza derivada de nuevos yacimientos petroleros encontrados permitieron tener nuevos márgenes de maniobra al gobierno. Por ello, a partir de 1978 el crecimiento económico volvio a repuntar. La tasa de crecimiento promedio real fue de 8.6 % hasta 1981. Como todos los sectores productivos, la agricultura también perdió competitividad por la devaluación efectuada. Con la holgura presupuestal de los ingresos petroleros, nuevamente se brindaron apoyos fiscales al sector agrícola.

Las nuevas condiciones detonaron de nueva cuenta reformas en el modelo económico del país. Para poder financiar el servicio de la deuda se requería generar un supervít comercial, lo que implicaba disminuir la demanda de bienes importados y estimular el desarrollo de bienes exportables. Uno de los ajustes descansó en la austeridad fiscal y en la devaluación del peso comprendido en el periodo de 1982-1983. Hubo una drástica restricción en la inversión pública, así como la imposición de elevados impuestos indirectos y tarifas por parte del sector público.

El producto interno bruto presentó una tasa negativa en 1982 de 0.6 % y para el año de 1983 fue de 4.2 %. Las remuneraciones reales cayeron en un 22 %, las importaciones bajaron de 24,000 a 14,400 millones de dólares en 1982, hasta caer a 8,300 millones de dólares para el año 1983. El relativo equilibrio externo logrado permitió apoyar las políticas de estabilización y de reactivación económica aplicada en 1984-1985 [19].

El descenso de la inflación fue de 80 % a 60 % en 1983, simultáneamente para este año hubo una modesta recuperación del 3 % en la producción para estos periodos. Pero aunque el ingreso derivado de la venta de petróleo ayudo al valor real del superávit del sector público, el desplome de los precios del crudo volvió a generar agudos problemas de desequilibrio externo y enormes restricciones para el equilibrio fiscal. Para lograr el ajuste y el progreso en el equilibrio externo, se tuvieron que llevar a cabo la incorporación de los distintos agentes dentro de un programa de estabilización de responsabilidad compartida.

A finales de 1987 se consolidó el Pacto de Solidaridad Económica (*PSE*). A diferencia de la austeridad fiscal, el sector privado se comprometió con el control de precios en bienes y servicios clave, y por parte de los trabajadores aceptaron el control sobre los salarios. Este programa ayudo a reducir el déficit fiscal y poner un control a la inflación. Sin embargo la salida de capitales presionaba la capacidad del gobierno de hacer frente a una deuda interna que ya era importante.

La apertura económica dio inició a un periodo en donde se había vuelto a una economía cerrada derivada de las dificultades en las balanzas de pagos -dentro del marco de la enfermedad holandesa[5]- durante el auge del petróleo y el fuerte proceso de endeudamiento de 1978 a 1981. Ya en este último año, al tratar de frenar el profundo desequilibrio externo, se restablecieron la mayor parte de los controles directos a las importaciones eliminados anteriormente por el auge del oro negro.

En 1986 se celebró la entrada al GATT[6] por lo que en los años

[5]El término surge de la década de 1960 cuando las riquezas de los Países Bajos aumentaron considerablemente a consecuencia del descubrimiento de grandes yacimientos de gas natural en Slochteren, cerca del Mar del Norte.

[6]Es el Acuerdo General sobre Aranceles Aduaneros y Comercio, creado en la Conferencia de La Habana en 1947, firmado en 1948, por la necesidad de establecer un conjunto de normas comerciales y concesiones arancelarias; está considerado como el precursor de la Organización Mundial de Comercio (OMC)

siguientes fueron muy significativos los cambios en materia de política comercial. La cobertura de los permisos de importación se redujo de 92.2 % en junio de 1985, a menos del 18 % a finales de 1990. Simultáneamente se eliminaron los precios oficiales de importación, política que reforzaba la política arancelaria del gobierno. Al concentrarse en la política fiscal la recuperación de los desequilibrios macroeconómicos, el Estado tomo la responsabilidad fundamental de la estabilización.

El ajuste fiscal permitió controlar el déficit fiscal. Sin duda los ingresos que provenían de la privatización de empresas estatales hicieron que los ingresos fiscales consolidaran la recuperación en la actividad económica y la ampliación de la base tributaria. El deterioro de las finanzas públicas impidió generar inversiones en la empresas públicas para que estas al menos operaran de manera eficiente.

El proceso de privatización cumple al menos dos objetivos: el incremento de ingresos fiscales, por lo menos en el corto plazo, y un estímulo a la repatriación de capitales. La empresa pública puede justificarse en la creación de infraestructura básica no rentable para las iniciativas privadas por la presencia de externalidades o por una rentabilidad a muy largo plazo, o en la con-formación de un punto de partida en la diversificación industrial, la intregación vertical y el desarrollo tecnológico.

El Estado productor hacia el Estado regulador, constituye una de las líneas principales en la transformación del Estado. A comienzos de la década de los 80´s, el crédito al campo representaba una proporción bastante mayor a su contribución al producto. Es decir, mientras el sector agropecuario aportaba más del 7 % al valor agregado, recibía una fracción del financiamiento bancario cercano al 20 %. Todavía en 1990, el campo tenía una asignación mayor a sus contribuciones del producto, 6.1 % y 8.6 % respectivamente. A partir de ahí, los apoyos financieros caen más allá de la pérdida del peso de la economía agropecuaria.

En 2001, apenas se le otorgaba el 3.8 % de los créditos, aunque su producto representa el 5.2 % del total. Más aún, mientras que el crédito cayó, el aporte de la banca de desarrollo disminuyó de 38 a 29 % entre 1990 y 2001. El conjunto de recursos canalizados al propio sector agropecuario, en particular los créditos de avío del Banco Nacional de Crédito Rural (*BANRURAL*) medidos a precios constantes cayeron 20 % entre 1994 y 2002, y los de los Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura (*FIRA*) se reducieron en 60 % entre ese año y el 2000 [19].

En el Cuadro no. 4 se señala la otorgación de crédito al sector agrícola por parte de la banca privada y la banca de desarrollo. Es alarmante observar la imposibilidad que tiene el sector para poder acceder de manera directa a recursos que le permitan ampliar o solventar los gastos a los que se enfrentan los campesinos durante el proceso productivo. El porcentaje para todos los periodos en menor al 10 % y la banca de desarrollo su participación como fuente de financiamiento ha sido aún menor. La fuente de financiamiento para estos campesinos han sido sus proveedores, que representan hasta un 90 % de los recursos financiados por parte de este sector.

Hasta 1993 la estrategia de realizar simultáneamente las reformas estructurales y los ajustes para la estabilización económica mantuvieron su viabilidad, a pesar de las tensiones que esto generaba. Las prioridades de política centradas en el control de la inflación y en las reformas necesarias para la integración de la economía mexicana al TLC, provocaban el retraso cambiario y un creciente desequilibrio externo, al que se respondía frenando aún más el deslizamiento del peso a fin de continuar estimulando la entrada de capitales.

Durante 1994 el contexto externo de la economía mexicana comenzó a variar muy rápidamente. Se consolidaba la recuperación internacional y se estimulaban las inversiones en los países desarrollados. El creciente déficit comercial y la ausencia de políticas que incentivaran el ahorro interno tomaron como base del equilibrio macroeconómico la entrada de capitales del exterior.

Esto significaba un cambio cualitativo mayor en las condiciones de una apuesta que tenía en la estabilidad del flujo de capitales la variable fundamental para mantener los equilibrios macroeconómicos. La falta de una respuesta adecuada a esas nuevas condiciones generó un proceso acumulativo de mayor pérdida de confianza y mayor utilización de capitales de cortísimo plazo, y de mecanismos indexados al dólar que hacían cada vez más inevitable el colapso final de la estrategia.

Por otra parte, la inserción internacional de México, dominada por su integración al TLC[7], lo convirtió en un destinatario preferente de corrientes de capital, que si bien son modestas comparadas con los movimientos monetarios entre los países desarrollados, alcanzan montos muy significativos dentro del contexto

[7] Tratado de Libre Comercio de América del Norte (Canandá-EU-México)

económico nacional.

Por último es necesario mencionar, aunque sale fuera de la investigación, los resultados del sector agrícola después de la entrada en vigor del TLC. En la firma del tratado se puntializó una prórroga para protejer y consolidar al sector agropecuario nacional, y por ello su entrada en vigor sería a partir del primer día del 2004. Los resultados de la entrada en vigor del tratado han sido devastadores. Nuestro campo ha sido destarrado a su desaparición y los productos agrícolas que han tomado lugar han sido los importados.

1.3. La productividad agrícola

La agricultura tenía como prioridad superar los entrabes al progreso de la industria, derivándose de allí las funciones que se le atribuían al sector en el desarrollo económico: proveer bienes a bajos precios, producir eficientemente materias primas industriales, generar divisas para financiar la importación de bienes de capital para la producción industrial, liberar mano de obra para el mercado de trabajo y contribuir al crecimiento del mercado interno.

En los países desarrollados con dotación de recursos naturales relativamente favorable, como los países escandinavos, los procesos de industrialización se basaron fuertemente en el aprovechamiento de sus recursos naturales. En cambio, en México, como en muchos países del Tercer Mundo, el carácter excluyente del desarrollo provocó la polarización económica y la severa marginalidad social que determinaron el enorme retraso rural e inhibieron el aprovechamiento de los recursos naturales, permitiendo su deterioro por prácticas que dejaron exhausta esta fuente de riqueza por explotarla con exceso.

La combinación de grandes masas rurales pobres, sin capacitación, educación ni condiciones mínimas de subsistencia, junto con la ausencia de una política de compromiso con la sustentabilidad ambiental del desarrollo ha generado una dinámica negativa donde la pobreza y la pérdida de potencial productivo son cada vez más graves en amplias zonas del país, desintegrando la base nacional del desarrollo.

En el futuro, la población económicamente dependiente de la agricultura tendrá que aumentar fuertemente para corregir el desbalance que presenta actualmente entre una participación de la agricultura del 8 % en el PIB y una proporción de 22 % en la población económicamente activa. Sin embargo, esto no debe significar una mera ampliación en el número de agricultores, que en la práctica sería simplemente repoblar el campo, sino debe ser el resultado de una profunda transformación en el desarrollo agrícola y rural [19].

La productividad es una variable que determina la eficiencia con la que se esta trabajando una actividad económica. Esta productividad relaciona la producción y el número de personas ocupados en dicha actividad. Para el caso agrícola, la mayor parte de su producción es de temporal; su productividad por ende es baja, ya que alrededor de 6 meses espera el campesino para obtener fruto de su trabajo. Por otro lado, en granjas de riego su productividad es muy alta a diferencia de los otros.

En el Cuadro no. 6 podemos observar la relación de estas variables. En la primer columna se encuentra la población total que se encuentra en el sector rural. Ahora de las personas que están ocupadas cuales se encuentran empleadas en el sector agrícola, y por último, las columnas de la derecha, destaca los bajos niveles de productividad del sector agrícola con respecto a otras actividades económicas que es aún mayor para esos periodos analizados.

No es en absoluto indiferente si 5 %, o más de la población, que se desplazará desde la agricultura, lo hace hacia actividades informales en las grandes urbes, agudizando la polarización económica y la marginación social, o bien fortalece el sistema de ciudades intermedias, la integración de las actividades económicas de los diversos sectores y el equilibrio en el desarrollo regional del país.

Considerando las condiciones de subempleo estructural y la elevada proporción de la población rural, el país no puede permitirse un patrón tecnológico de crecimiento agrícola sin generación de empleo. La creación de empleos productivos para la población rural implica intensos procesos de capacitación, formación de mano de obra, educación y una visión de largo plazo en ciencia y tecnología.

1.4. Conclusiones

En los últimos años el sector agrícola ha disminuído sus niveles de producción, lo cual ha sido insuficiente para garantizar los niveles de consumo del mercado interno. Por otro lado, muestra la terrible volatilidad de esta actividad en relación al resto de los sectores económicos.

Sin embargo, la actual política agropecuaria, basada en una mayor especialización de las unidades productoras ha generado un cambio en la estructura productiva de las actividades agrícolas. Así, las frutas y hortalizas muestran un mayor dinamismo y un aumento en la superficie cultivada, en contraste, los cereales registran un descenso tanto en producción como en superficie.

Se requiere que la política agropecuaria se integre en el marco de una estrategia de desarrollo rural y regional, incorporando a la política pública, el enfoque de la dimensión territorial que reconozca el carácter heterogéneo y complejo del espacio rural y las cambiantes condiciones del campo en el marco de la globalización, e incorpore a la sociedad en la formulación de dicha política.

Asimismo, se deben instrumentar acciones que disminuyan la incertidumbre y el riesgo en las actividades agropecuarias, mediante programas más activos del seguro agropecuario. La continua especialización de las unidades productoras reducirán la oferta de productos agrícolas, incrementando aún más las importaciones y generando una situación de riesgo para el país; no lograr una seguridad alimentaria mínima que asegure un desarrollo sustentable para México.

En el siguiente capítulo hacemos enfásis en las herramientas matemáticas, condiciones fundamentales para analizar el sistema económico a través de la estabilidad de las ecuaciones en diferencias que proponemos. Aunque el capítulo 2 expone el contenido matemático necesario, en el capítulo 3 de discusión retomaremos los resultados comentados en el capítulo.

Capítulo 2

Antecedentes de Matemáticas.

En el presente capítulo se expone la teoría de los sistemas dinámicos así como una breve exposición de los límites inversos en la topología. Se hace mención de los sistemas dinámicos lineales y no lineales, así como la establidad local de estos sistemas. También se exponen los sistemas continuos y discretos, en particular estudiamos los sistemas discretos que serán abordardos mediante el análisis de los límites inversos. La utilidad de este capítulo es exponer las herramientas técnicas para poder abordar las estabilidad del sistemá económico propuesto en el siguiente capítulo.

2.1. Introducción

Un *sistema dinámico* es cualquier conjunto de objetos, materiales o conceptuales, definido por una serie de variables dependientes del tiempo. Esta definición engloba tanto a sistemas mecánicos como un péndulo o un sistema de partículas, como a un modelo de evolución económica o un colectivo social. Entonces podemos decir que los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales.

Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones, y son dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. El estudio de los sistemas dinámicos puede dividirse en tres formas:

a) Enfoque Analítico: modelado de procesos por medio de ecuaciones de estado que relacionan estados pasados con estados futuros. Existe una solución exacta al planteamiento.

b) Enfoque Cualitativo: es un análisis gráfico o descriptivo de soluciones a problemas de modelado que muchas veces no tienen una solución exacta.

c) Enfoque Númerico: en éste se realizan experimentos de laboratorio o la simulación por computadora de modelado para aproximar un conjunto de soluciones al sistema.

Consideremos un sistema dinámico definido por un conjunto de variables. Como todo sistema real, en nuestro modelo dinámico presentamos una evolución de sus variables en el tiempo. Esta evolución puede seguir un cierto patrón, lo que denominaremos reglas de evolución. Para trabajar matemáticamente con un sistema dinámico dado y predecir su comportamiento de forma numérica, debemos representarlo en forma de ecuaciones que liguen las diferentes variables x_i y posiblemente el tiempo t. Estas representaciones pueden ser muy variadas: desde ecuaciones diferenciales de cualquier tipo a ecuaciones de recurrencia o en diferencias.

En el caso continuo tenemos que $\dot{\overline{x}} = f(x_1, x_2, ..., x_n, t) = f(\overline{x}, t)$, y para el caso discreto es $x_{t+1} = f(\overline{x}_t, t)$. Es decir, plasmamos las reglas de evolución del sistema en ecuaciones matemáticas que nos permitirán trabajar con ellas y predecir diversos comportamientos [6].

2.2. Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

2.2.1. Sistemas Autónomos y No Autónomos

Tal y como definimos en la sección anterior, las ecuaciones de evolución del sistema establecen que la variable temporal t puede o no aparecer en dichas ecuaciones. En base a esto se genera el siguiente criterio de clasificación de los sistemas dinámicos: un sistema se dirá autónomo cuando sus ecuaciones de movimiento contengan implícitamente el tiempo, y no autónomo en caso contrario.

$$\dot{\overline{x}} = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\overline{x}) \text{ ó } \overline{x}_{t+1} = f(\overline{x}_t)$$

Un sistema dinámico en el cual la variable temporal presente un papel continuo se denomina *sistema continuo*. Por otra parte, si conocemos el estado del sistema sólo para determinados valores del tiempo, se dice que es un *sistema discreto* [7].

2.2.2. Linealidad y No Linealidad

Dadas las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico de orden n,

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

o su análogo en forma discreta. Decimos que se trata de un sistema lineal cuando las funciones f_i son lineales en las variables x_i. Por ejemplo, el sistema dinámico:

$$\dot{x_1} = ax_1 + bx_2$$

$$\dot{x_2} = cx_1 + dx_2$$

con a, b, c, d constantes reales. El sistema de ecuaciones anterior puede escribirse de forma compacta introduciendo la notación vectorial: $\dot{X} = (\dot{x_1}, \dot{x_2}), X = (x_1, x_2)$. De esta forma, $\dot{X} = AX$ siendo A la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En este caso, las ecuaciones anteriores suelen denotarse de una forma compacta mediante $\dot{X} = f(X)$ donde hemos utilizado los vectores $\dot{X} = (\dot{x_1}, \dot{x_2})$ y $f(X) = (f_1, f_2)$, (o su análogo en forma discreta)

Cuando posteriormente nombremos un sistema dinámico, sin más aclaraciones, nos estaremos refiriendo a un sistema dinámico general, el cual podría ser lineal o no lineal [39].

En economía es común encontrar sistemas lineales para poder hacer pronósticos. El caso más destacable es el de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) utilizado en *Econometría*, que trata de linealizar una tendencia de alguna variable económica y se cree que en el futuro se comportará de la misma manera que el sistema lineal.

2.2.3. Espacio Fase

Consideremos un sistema dinámico definido por las variables x_i, $i = 1, \ldots\ldots, n$. El espacio n-dimensional construido a partir de las variables x_i se denomina *espacio-fase del sistema*. Decimos entonces que el sistema dinámico tiene dimensión de orden n. Por ejemplo, un sistema dinámico de orden 2 está compuesto por un par de variables, que podemos denotar por x_1, x_2. El espacio fase del sistema en cuestión es, pues, el plano x_1, x_2 [7].

2.2.4. Trayectoria

La solución de un sistema dinámico $\dot{x}= f(x)$ (o su análogo en forma discreta) de orden n, dadas unas condiciones iniciales, consiste en un conjunto de funciones $x_1(t), ...x_n(t)$ que satisfacen el sistema. Dichas funciones constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio fase, denominada *trayectoria del sistema.*

El conjunto de trayectorias del sistema del espacio fase para las posibles condiciones iniciales del sistema, se denomina *diagrama fase del sistema.*

2.2.5. Flujo

Tomemos un sistema dinámico continuo, definido por las variables,

$$\dot{x}_1= f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2= f_2(x_1, x_2)$$

En el espacio fase, esto es, en el plano (x_1, x_2) podemos definir el campo vectorial dado por:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}$$

dicho campo vectorial se llama *campo de velocidades* [39].

La introducción del campo de velocidades nos permite imaginar el espacio fase como un fluido en movimiento, lo que nos permite utilizar una herramienta gráfica para estudiar la evolución de los sistemas dinámicos. De ahí que frecuentemente se hable del flujo de los puntos.

2.2.6. Punto Fijo

Definido un sistema dinámico de orden n en las variables $x_1, ...x_n$, se denominan *puntos fijos* a los puntos del espacio fase que verifican,

$$x_i = f_i(x_1, ..., x_n) = 0$$

para todas las variables [6].

Su análogo en un sistema discreto son tales que, $\overline{x}_t = f(\overline{x}_t)$

2.2.7. Perturbación

Denominamos *perturbación de un sistema dinámico* a una pequeña variación de las variables que definen su estado. A partir de esta definición, podemos decir que el sistema se encuentra en un estado (punto) estable si, tras ser perturbado, vuelve a su estado inicial; el sistema se encuentra en un estado (punto) inestable si, tras ser sometido a una perturbación, se aleja del estado inicial sin volver a él.

2.2.8. Estabilidad Local y Global

No siempre la estabilidad o inestabilidad es un concepto absoluto. Puede ocurrir que, encontrándose el sistema en un punto dado, se determine que el punto es estable para pequeñas perturbaciones, siendo inestable para mayores perturbaciones. Se diferencia así entre la estabilidad local, como en este caso, y la estabilidad global. Por ejemplo, un punto globalmente estable debe atraer, por definición, a todos los puntos del espacio de las fases.

Definición 2.1 *Un punto fijo* $\overline{x}$ *se dice que es estable si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe una* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$, *entonces* $\|x(t) - \overline{x}\| < \varepsilon$, *para todo* $t > 0$ *[33] (Con* x_0 *la condición inicial).*

Definición 2.2 *El punto fijo* $\overline{x}$ *se dice que es asintóticamente estable si:*

a) es estable; y

b) existe una $\eta > 0$ *tal que siempre* $\|x_0 - \overline{x}\| < \eta$

$\lim\limits_{t \to \infty} \|x(t) - \overline{x}\| = 0$ *[33].*

Definición 2.3 *Un punto fijo x_0 de una función F se llama* ***atractor*** *si existe un intervalo alrededor de x_0, con la propiedad de que cualquier otro x_1 que permanezca en este intervalo tenga una órbita en éste y tienda a x_0 bajo la iteración de F. El punto fijo se llama* ***repulsor*** *si existe un intervalo alrededor de x_0 con la propiedad de que cualquier otro x_1 en un intervalo (excepto x_0) tenga una órbita que salga del intervalo bajo la iteración de F. Un punto fijo que no es ni atractor ni repulsor se llama* ***neutro*** *[6].*

Existen criterios para determinar la estabilidad para los sistemas discretos:

Teorema 2.4 *[1] Sea f un mapeo para una ecuación en diferencias en $\mathbb{R}^n$, y asumimos que p como punto fijo de f, tenemos:*

1) Si $|f'(p)| < 1$, entonces p es un sumidero.

2) Si $|f'(p)| > 1$, entonces p es una fuente.

Existen criterios para determinar la estabilidad para los sistemas continuos:

Teorema 2.5 *[6] Suponga que y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(y)$ donde f es una función diferenciable continuamente. Entonces,*

a) Si $f'(y_0) < 0$, entonces y_0 es un sumidero;

b) Si $f'(y_0) > 0$, entonces y_0 es una fuente; o

c) Si $f'(y_0) = 0$, o si $f'(y_0)$ no existe, entonces necesitamos información adicional para determinar el tipo de y_0.

2.2.9. Linealización

Consideremos un sistema dinámico no lineal. A partir de sus ecuaciones, podemos obtener las expresiones de los puntos fijos del sistema. Ahora bien, analizar un sistema no lineal es más complejo que analizar un sistema lineal, para el cual podemos realizar un procedimiento sistemático consistente en hallar los valores y vectores propios de la matriz A, definida anteriormente. Buscamos, pues, una forma de linealizar el sistema no lineal, para aplicar las mismas técnicas sistemáticas de análisis. Esbozaremos el procedimiento para un sistema no lineal de segundo orden,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

para el cual, un punto fijo viene dado por (x_1^0, x_2^0), esto es,

$$f_1(x_1^0, x_2^0) = f_2(x_1^0, x_2^0) = 0$$

que constituyen las componentes de una perturbación alrededor del punto fijo. Para estudiar si la perturbación crece o decrece en el tiempo, derivamos respecto de t,

$$\dot{u}=\dot{x}_1= f_1(x_1^0+u, x_2^0+v) = f_1(x_1^0, x_2^0) + u\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+v\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+O(u^2, v^2, uv)$$

donde hemos usado el desarrollo de Taylor de la función f_1. Al ser $f_1(x_1^0, x_2^0) = 0$ por ser un punto fijo,

$$\dot{u}= u\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+v\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+O(u^2, v^2, uv)$$

y de forma similar

$$\dot{v}= u\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+v\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+O(u^2, v^2, uv)$$

Si los términos cuadráticos, englobados en el término $O(u^2, v^2, uv)$ son despreciables frente a los términos lineales, obtenemos el sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(x_1^0, x_2^0)} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

que puede ser analizado con los mismos métodos de un sistema lineal. Las condiciones en las cuales los términos de segundo orden pueden ser despreciados dependen de los autovalores de la matriz jacobiana J, y serán comentados posteriormente [30].

La linealización también es conocida como el Teorema de Hartman-Grobman. El cual dice que si x es un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$ y J es la matriz Jacobiana asociada al sistema cumplen que J tiene valores propios con parte real distinta de cero, entonces las órbitas locales del sistema no lineal en el punto fijo corresponden a orbitas cercanas al origen del sistema lineal asociado a J.

Es decir, se preserva la estabilidad. Formalmente es el siguiente teorema:

Teorema 2.6 ***(Hartman-Grobman)*** *Si $\overline{x}$ es un punto fijo hiperbólico de $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^m$ entonces tenemos un homeomorfismo h definido en alguna vecindad N de $\overline{x}$ en $\mathbb{R}^m$, manda órbitas locales del sistema no lineal hacia el sistema lineal. La función h preserva el sentido de las órbitas que también puede ser elegido a fin de preservar la parametrización por el tiempo [33].*

2.2.10. Valores y Vectores Propios

Sea un sistema dinámico lineal de segundo orden, definido por la ecuación, $\dot{X} = AX$, el rango de A es 2 y su único punto fijo es en el (0,0). Deseamos hallar soluciones del tipo $x(t) = \exp(\lambda t)v$, siendo $v = (v_1, v_2)$ un vector constante del espacio fásico. Dichas trayectorias corresponden a rectas que pasan por el origen en el espacio fase, tal y como puede comprobarse haciendo,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{v_2}{v_1} = k \Longrightarrow x_2 = kx_1$$

lo que nos permitirá realizar un esbozo gráfico del flujo en el plano fase, (x_1, x_2). Introduciendo la solución buscada en la ecuación del sistema, y realizando ciertas manipulaciones algebraicas, obtenemos la ecuación, $(A - \lambda I)v = 0$, donde I es la matriz identidad. La expresión anterior reduce el problema a hallar los valores propios de la matriz A, definidos como aquellos que anulan el polinomio en λ resultante de hallar el determinante $|A - \lambda I|$, que es el polinomio,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

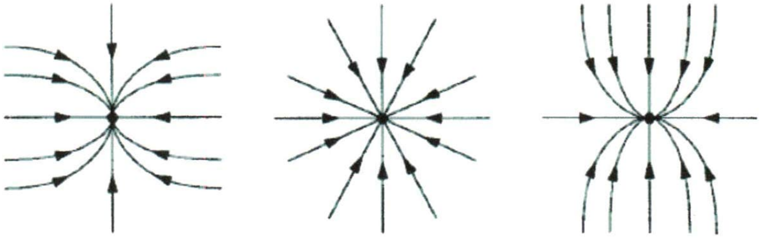
Una vez hallados los valores propios λ_1, λ_2 que pueden ser iguales o distintos, al introducir cada uno de ellos en la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$, obtenemos vectores v_1, v_2 que se denominan vectores propios asociados, respectivamente, a los valores propios o autovalores λ_1, λ_2 [30]

2.2.11. Tipos de Estabilidad o Inestabilidad

Las soluciones halladas en el apartado anterior, $x(t) = \exp(\lambda t)v$ corresponde como hemos comentado, a rectas que pasan por el origen. Ahora bien, la parte real del valor propio λ es positivo, entonces el límite cuando t tiende al infinito hace que $x(t)$ sea divergente. Por otra parte si λ es negativo, entonces es estable pues $x(t)$ tienede a $(0,0)$. Describiremos los diferentes tipos de puntos fijos más relevantes que podemos encontrar en el plano fase de un sistema lineal, mediante gráficos.

Nodo

Un *nodo* puede presentar diferentes formas, tal y como se aprecia en la siguiente figura.

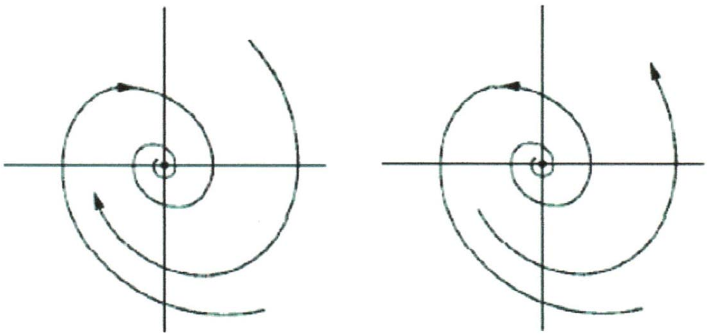


Gráfica 4

Los nodos presentes en el gráfico se denominan *nodos estables*, debido a que atraen a las trayectorias cercanas. En caso contrario, se denominan nodos inestables. Un nodo se obtiene cuando los valores propios son reales y del mismo signo. El caso central es un caso particular, denominado nodo simétrico o estrella, en el cual la magnitud de los dos valores propios es la misma.

Foco

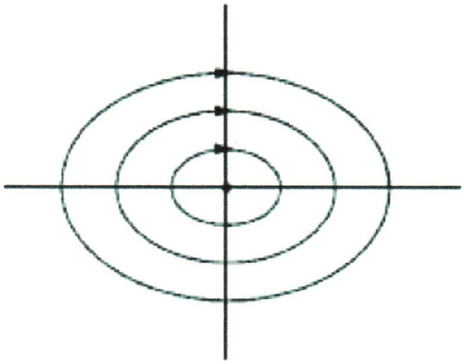
Se denomina *foco* a un punto fijo que presenta la forma indicada en la figura dibujada a continuación. Esta vez hemos plasmado tanto el foco estable como el foco inestable. Un foco se obtiene cuando los valores propios son complejos, con parte real no nula.



Gráfica 5

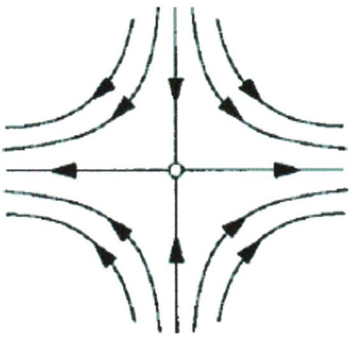
Centro

Un *centro* presenta la forma indicada en la figura. Se obtiene cuando los autovalores son complejos, con parte real nula. Se dice que un centro es neutralmente estable, debido a que no atrae ni repele las trayectorias cercanas.



Gráfica 6

Punto Silla



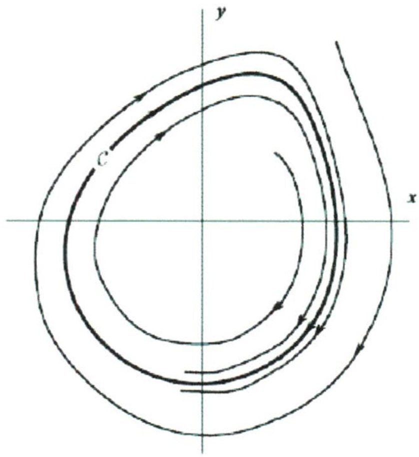
Gráfica 7

Un *punto de silla* se obtiene cuando los autovalores son reales, de distinto signo. Podemos apreciar que posee dos direcciones de diferente estabilidad.

2.2.12. Ciclos Límite

Un *ciclo límite* es una trayectoria que es aislada y cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite, entonces éste es *estable* (ω–límite). El cíclo es *inestable* (α–límite) si las trayectorias vecinas se alejan al ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es *semiestable* (α, ω–límite) y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden hacia él [24].



Gráfica 8

Es necesario comentar que los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que ocurran en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener órbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo de tipo centro.

2.3. Caos

Hablando superficialmente, un fenómeno que cambia con el tiempo es caótico, si carece de un patrón en su comportamiento a lo largo del tiempo. Una sorpresa en las matemáticas de los últimos treinta años ha sido la observación de fenómenos caóticos descritos por reglas muy sencillas.

En economía, es deseable entender los mecanismos que originan que un fenómeno sea caótico. En el caso de modelar sistemas dinámicos, es de vital importancia conocer si éstos no son caóticos, ya que a lo largo del tiempo puede que ese sistema no converga a un estado estacionario o de equilibrio económico. Para las definiciones del caos usaremos las siguientes definiciones y teoremas conocidos:

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una función continua. Dado que el contradominio y el domino de f son en el mismo espacio, podemos definir nuevas funciones a partir de la compsición de f consigo misma: f^0, será la función identidad, $f^o = id : X \to X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f, \ldots, f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$. Llameremos a estas funciones las *iteradas de* f. Las siguientes dos propiedades son imediatas: Si $n, m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ representa al conjunto de los números enteros positivos), entonces $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{mn}$.

Dado un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

$$\{x,\, f(x),\, f^2(x),\, f^3(x), \ldots\} = o(x,\, f)$$

Definición 2.7 *[13] Sea $f : X \to X$. Decimos que x es un punto periódico de f, o tiene una órbita periódica bajo f, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menos de estos números le llamamos el periodo de x. Si $f(x) = x$, decimos que x es un punto fijo (además de ser un punto periódico de periodo 1). Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos así: $Per(f)$.*

Una de las funciones clave en el estudio de los sistemas dinámicos discretos es el siguiente: Sea $T : I \to I$ dada por la regla de correspondencia

$$T(x) = \begin{matrix} 2x \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 2 - 2x \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{matrix}$$

En la literatura en inglés esta en función es conocida como el *tent map*. Entonces en lo sucesivo nos referiremos a ella como la tienda, y de denotará con la letra T.

Proposición 2.8 *[13] Se sabe que $Per(T)$ es un conjunto denso en I.*

Definición 2.9 *[13] Sea $f : X \to X$. Decimos que f es topológicamente transitiva (o transitiva) en X si para cualquier pareja de subconjuntos abiertos de X, A y B, distintos del vacío, existen $a \in A$ y $n \geq 1$ tales que $f^n(a) \in B$.*

Un ejemplo de ello:

Proposición 2.10 *[13] La función T, es transitiva en I.*

Supongamos que x_0 es un punto fijo de $f\colon I \to I$. Si para puntos cercano a x_0 observamos que sus órbitas se mantienen, para toda interacción de f, cercanas a x_0, entonces diremos que x_0 es un punto fijo estable. Digamos que nuestra idea de estabilidad en un punto fijo se refiere a que el comportamiento de todas las órbitas que inician cerca de él se comportan casi como órbitas de puntos fijos. La siguiente definición presenta de manera formal está idea.

Definición 2.11 *[13] Sea x_0 es un punto fijo de $f\colon I \to I$. Decimos que x_0 es un punto fijo estable si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $y \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \cap I$ se tiene que $|f^n(y) - x_0| < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Un ejemplo de ello:

Proposición 2.12 *[13] La función T es sensible en I.*

Ahora presentamos la definicón de caos:

Definición 2.13 *[13] Sea $f : X \to X$. Decimos que f es caótica en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

i) El conjunto de puntos periódicos de f forma un conjunto denso en X.

ii) f es transitiva en X.

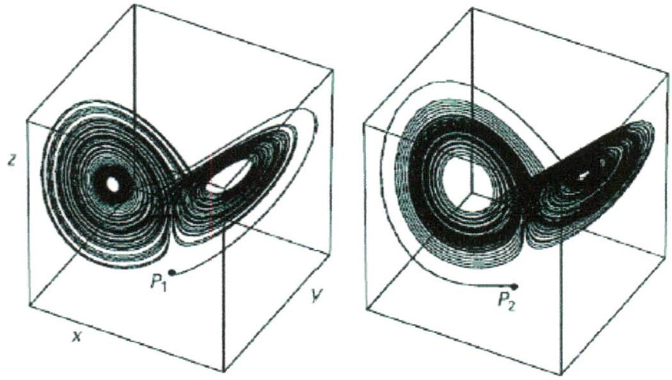
iii) f es sensible a las condiciones iniciales en X.

Un ejemplo de ello:

Proposición 2.14 *La función tienda T, es caótica en I.*

2.3.1. Atractores Extraños

Un atractor extraño es aquel que tiene un movimiento aperiódico y es muy sensible a las condiciones inciales. En muchas ocasiones surge cuando diferentes ciclos límite y puntos fijos tipo silla se encuentran en el sistema.



Gráfica 9

Bajo ciertas condiciones dichos repulsores enviarán la trayectoria a infinito; sin embargo puede haber situaciones que la trayectoria se quede viajando de repulsor a repulsor, sin tender al infinito, hacia una órbita aperódica. En la figura 9 se muestra el atractor extraño de *Lorenz*, que formuló a través de un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales un modelo para describir el comportamiento del medio ambiente.

2.4. Topología

La topología es una disciplina matemática que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. De una manera informal, se presenta como la "Geometría de Goma". Esto hace referencia a que en la geometría euclídeana dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área o volumen. En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio: han de tener el mismo número de trozos, de agujeros, de intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger o retorcer los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado.

Dentro de la topología existen los límites inversos, que se definen en conjuntos con estructuras complicadas, pero para los fines de esta tesis, los definimos en algunos conjuntos acotados del plano $\mathbb{R}^2$, es decir, en algunos continuos.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Sólo trabajaremos con continuos del plano $\mathbb{R}^2$ o del espacio $\mathbb{R}^3$. Por ello a los continuos los veremos como subconjuntos de estos espacios, que cumplen con ser cerrados, acotados, no vacíós y que no se pueden ver dentro de conjuntos separados o con más de una pieza. Si X y Y son continuos y Y está contenido en X, entonces Y es un *subcontinuo* de X. Un continuo es *descomponible* si éste es la unión de dos de sus subcontinuos propios. Si un continuo no es descomponible, éste se llamará *indescomponible [21].*

Casi todos los continuos que podemos pensar o ver, son descomponibles. Se sabe que hay mucho más continuos indescomponibles que descomponibles [34]. Los continuos indescomponibles además de que existen, tienen una presencia importante en sistemas dinámicos caóticos. Tal es el caso del *Continuo Indescomponible de Knaster*, el cual, es parecido al atractor conocido como la *Herradura de Smale.*

Recordemos algunas cosas de los continuos indescomponibles. Si X es un continuo y x es un elemento de X, Cps(x) es llamada la *composante* de x entonces $Cps(x) = \{y \in X :$ existe un subcontinuo propio de X que contiene a ambos x y $y\}$. El conjunto de composantes de un continuo indescomponible es una partición de un continuo X en una colección no numerable de conjuntos mutuamente disjuntos, cada uno de los cuales es denso en el continuo [34].

Tiene sentido pensar en el continuo de Knaster. Se crea usando el *conjunto de Cantor*, pero lo que alcanzamos a dibujar sólo es una trayectoria que se obtiene de los puntos racionales del conjunto de Cantor. Pero nos faltan muchos, es decir, muchas trayectorias que serán ajenas a la que vemos y que también serán densas en el continuo de Knaster. De hecho, éste continuo cumple con otras propiedades importantes, como que cada subcontinuo propio debe ser un arco. Un continuo que cumple la propiedad de que cada subcontinuo propio es un arco se llama un *arco-continuo.* En el caso de los arco-continuos indescomponibles, cada composante de el arco-continuo indescomponible es como un arco o un rayo o algo parecido a la recta real. En nuestro modelo este tipo de conjuntos son los que nos interesan, los subcontinuos indescomponibles.

Daremos ahora la definición de límite inverso [34]. Tenemos $\{X_1, X_2, \ldots\}$ una sucesión de continuos y $\{f_1, f_2, \ldots\}$ una sucesión de funciones continuas y suprayectivas, tales que $f_i^{i+1} : X_{i+1} \to X_i$ para cada i en $\{1, 2, \ldots\}$

Llamaremos a la sucesión $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$, una *sucesión inversa* y el *límite inverso* al espacio,

$$X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_n^{n+1}\} = \{(x_1, x_2, \ldots) : \text{para cada } n \in \mathbb{N}, f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n\}$$

considerado como subespacio del espacio producto $\Pi_{n=1}^{\infty} X_n$.

Cada X_n es llamado espacio factor del límite inverso y f_n^{n+1} son las *funciones de ligadura.*

Sea $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_n^{n+1}\}$. Si A es un conjunto cerrado de X_∞ entonces,

$$A = \varprojlim\{\pi_n(A), f_n^{n+1} |_{\pi_{n+1(A)}}\} = \Pi_{n=1}^{\infty}\pi_n(A) \cap X_\infty$$

Lo anterior implica que un subconjunto cerrado de un límite inverso también es un límite inverso.

También se sabe que si X_∞ es un límite inverso de continuos, entonces X_∞ es un continuo. Si cada $X_i = X$ denotaremos a $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_n^{n+1}\}$ o $\varprojlim\{X_i, f\}$ si, además, cada $f_n^{n+1} = f$.

Sólo usaremos sucesiones $\{I_1, I_2, I_3\}$ de subintervalos de $I = [0, 1]$, y sólo una función de ligadura f, con lo que $f_i^{i+1}(I_{i+1}) = I_i$. La distancia entre dos puntos $(x_1, x_2, \ldots)$, y $(y_1, y_2, ...)$, esta dada por $d((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$.

Entonces, el límite inverso parecería complicado, pues es un subconjunto de algo que tiene dimensión infinita. Pero hay resultados importantes que nos ayudan a ver que algunos límites inversos son más fáciles, pues se sabe que:

Si $f : X \to X$ es un *homeomorfismo* (función biyectiva, continua y con inversa continua), $\varprojlim\{X_i, f\}$ es homeomorfo a X. Es decir, el límite inverso, independiente de donde fué creado (dentro de algo que tiene dimensión infinita), es algo homeomorfo a X.

Claro, hay otros modelos o ejemplos de límites inversos que son más complicados, como el continuo indescomponible de Knaster. Aunque tampoco es tan difícil, pues también se sabe que es un límite inverso formado con espacios factores que son intervalos con una sola función de ligadura (la función tienda), este tipo de continuos se pueden encajar en el plano $\mathbb{R}^2$ [21].

Recordemos que uno de los propósitos de esta investigación es usar las herramientas que ya existen en límites inversos para describir ciertos conjuntos indescomponible creados con algunas funciones, verificar donde se crean estos conjuntos y describir esas trayectorias.

M. Barge y B. Diamond en 1994 [3], mostraron que si f es caótica entonces el límite inverso construido usando a f en $I = [0,1]$ como función de ligadura, contiene un subcontinuo indescomponible.

Teorema 2.15 : *[3] Supóngase que $f : X \to X$ es continua y X es una gráfica finita (en particular en un intervalo). Entonces, las siguientes son* *equivalentes:*

a) La entropía de f es positiva;

b) el límite inverso generado con f contiene un continuo indescomponible;

c) la función f contiene una "herradura"; y

d) existen $r, M \in \mathbb{N}$ tales que para $m \geqslant M$, f tiene un punto periódico de periodo rm.

Li y Yorke en 1975 [29] prueban que periodo tres implica caos. J. Kennedy en [25] describe el análisis del caos en dos modelos de dinámica regresiva, en ese sentido, nosotros describiremos que con alguna característica en nuestro modelo nos generará dinámica regresiva y con ello concluiremos si existe caos o no.

2.5. Ahora, la dinámica no lineal en la economía

El enfoque de análisis en series de tiempo estudiados en economía han sido tradicionalmente lineales. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en el análisis económico. Para ello se introduzcan conceptos e instrumentos nuevos relacionados con la no linealidad.

Los modelos lineales no pueden reproducir completamente la dinámica del sistema económico, sólo tienen la posibilidad de representar un número limitado de comportamientos. Únicamente mediante sistemas no lineales se puede reflejar la complejidad de la economía, que pasa de estados de equilibrio, estables o inestables, a estados periódicos o cuasiperiódicos, así como a comportamientos aparentemente aleatorios, pero generados por sistemas deterministas, es decir, comportamientos caóticos.

Si el comportamiento de la economía se confirma como caótico, el objetivo es buscar pautas dentro del comportamiento complejo que permitan la predicción en periodos de tiempo cortos. No serán posibles predicciones para periodos de tiempo largos, ya que una de las principales características de un sistema que sigue un comportamiento caótico es la dependencia de las condiciones iniciales, es decir, que cualquier pequeña divergencia en la consideración de las mismas se amplifica exponencialmente en el proceso dinamico.

En el capítulo siguiente se presenta la formulación de dos modelos y el otro no lineal en dinámica regresiva. Es importante señalar que así como en el capítulo 1 es importante los fundamentos económicos de la cual parte la creación de nuestro modelo, el capítulo que precede brinda los elementos matemáticos que permitan analizar su establidad y su comportamiento dentro del crecimiento económico nacional.

Capítulo 3

El Modelo de Crecimiento.

En el presente capítulo se formulan los modelos de ecuaciones en diferencias con dinámica progresiva y regresiva. Se expone como se crea el modelo y su relación para medir el crecimiento económico a través de éste. También se expone una breve des-cripción sobre las funciones de producción, útil, ya que en esta investigación se modifican los supuestos de producción para llegar a dinámica regresiva de la forma logística.

3.1. La Función de Producción

Esta función es la relación entre los factores productivos[8] y su

[8] Los economistas clásicos consideraban que para producir bienes y servicios era necesario utilizar unos recursos o factores productivos: la tierra, el trabajo, el capital y la tecnología

combinanción para generar bienes y servicios en una economía dada. Esta relación entre un bien y los factores de producción destinados para la elaboración del bien esta dada por $Q = f(L, K, T, Tec)$. Donde Q se refiere a la producción, L el trabajo, K el capital, T la tierra y Tec referente a los niveles tecnológicos.

La función de producción puede adaptar muchas formas algebraicas específicas. Típicamente, los economistas trabajan con funciones de producción homogéneas. Una función de producción es homogénea de grado n si cuando los insumos se multiplican por alguna constante, digamos k, el resultado es igual a k^n que multiplica al producto original. Esto es, para una función de producción:

$$Q = f(L, K), \text{ será homogénea si y sólo sí}$$
$$Q = f(k \cdot L, k \cdot K) = k^n \cdot f(L, K)$$

El exponente n, denota el grado de homogeneidad. Si $n = 1$ se dice que la función es homogénea de grado uno o linealmente homogénea (téngase en cuenta que ello no significa que la ecuación sea lineal; puede serlo o no). Una *función de producción homogénea lineal* es interesante en cuanto exhibe *Rendimientos Constantes de Escala.* Puede verse fácilmente, puesto que la expresión $k^n \cdot f(L, K)$ cuando $n = 1$ se reduce a $k \cdot f(L, K)$ de forma que multiplicando los insumos por una constante k simplemente aumenta el producto en esa misma proporción [11].

Ejemplos de funciones de producción linealmente homogéneas son la función de producción *Cobb – Douglas* y la función de producción de *elasticidad constante de sustitución (CES)*.

Si $n > 1$ entonces la función de producción da rendimientos crecientes a escala. Significa que la producción será más que proporcional a los incrementos de nuestros factores productivos.

Si $n < 1$ entonces la función de producción da rendimientos decrecientes a escala. Significa que la producción será menos que proporcional a los incrementos de nuestros factores productivos.

3.1.1. Función de Producción Cobb-Douglas

En economía, la función Cobb-Douglas[9] es una forma de función de producción que es ampliamente usada por los economistas para representar las relaciones existentes entre el producto y sus variaciones en los factores productivos. La función de producción estilo Cobb-Douglas tiene la siguiente forma algebraica:

[9]Fue propuesta por Knut Wicksell (1851-1926) e investigada con respecto a la evidencia estadística concreta, por Charles Cobb y Paul Douglas en 1928.

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

donde:

$Q =$ Producción, $L =$ Trabajo, $K =$ Capital y A, α, β son constantes

La función de producción es no homogénea de grado $\alpha + \beta$ ya que la multiplicación de L y K por una constante k, eleva la producción en una proporción $K^{\alpha+\beta}$

$$Q = A \cdot kL^{\alpha} \cdot kK^{\beta} = k^{\ \alpha+\beta}(A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta})$$

Si los exponentes suman 1, la función Cobb-Douglas es homogénea lineal, es decir, se obtiene rendimiento constante a escala. Si las funciones suman más de 1, muestra rendimientos crecientes a escala, si suman menos de 1, entonces tendríamos rendimientos decrecientes de escala.

3.1.2. Función de Producción de Elasticidades de Sustitución Constante (CES)

Otra de las funciones de producción es la función de producción CES es una función de producción homogénea lineal que tiene una elasticidad de sustitución de insumos constantes. Esta elasticidad puede tomar valores distintos de la unidad. La forma real de la producción CES es:

$$Q = A\left[aK^{-b} + (1-c)L^{-b}\right]^{-\frac{1}{b}}$$

donde:

Q = Producción, L = Trabajo, K = Capital y A, a, b, c son constantes. Este modelo fue introducido por primera vez en los modelos de Arrow [11]

3.2. Modelo

En el modelo de Jablanovic [23] relaciona la tasa de crecimiento de una economía nacional, dada por el incremento del PIB, con una función de producción específica y la participación de la agricultura en la producción. De esta relación obtiene una ecuación en diferencia de primer grado no lineal, la cual realizando un cambio de variable obtiene una ecuación logística: $Z_{t+1} = \pi \cdot Z_t(1 - Z_t), Z_t \in [0,1]$. A continuación presentamos dos diferentes modelos.

3.2.1. Previsión Progresiva Perfecta

En el modelo de previsión perfecta iniciamos tomando la Tasa

Autónoma del Producto Interno Bruto (PIB), como el crecimiento α, es decir,

$$\alpha = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} \text{.................}(1)$$

pero también como en el modelo descrito en [23], suponemos que el incremento del PIB, es decir $\alpha = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}$, depende de la productividad de la agricultura dada por $(\frac{L_t}{Y_T})$, así como de la participación de la agricultura P_t dada por $(\frac{P_t}{Y_t})$, por lo tanto tenemos;

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \alpha - \beta(\frac{L_t}{Y_T}) - \gamma(\frac{P_t}{Y_t}) \text{.........}(2)$$

En (2) tenemos la tasa de crecimiento del PIB en relación inversa a la productividad agrícola del subsector y también la relación inversa de la participación de este sector en la producción. Los supuestos que tomamos en este modelo son los siguientes:

Tomamos una función de producción con rendimientos constantes a escala,

$$Y_t = \lambda L_t \text{..............}(3)$$

en donde L_t es la fuerza laboral y $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ son parámetros.

Por otro parte, la agricultura contribuye con el PIB a partir de la siguiente relación,

$$P_t = \delta Y_t \text{............}(4)$$

Si sustituimos la ecuación (3) y (4) en (2), obtenemos,

$$\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t} = \alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta$$

$$Y_{t+1} = (\alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1)Y_t \text{.....}(5)$$

En (5) obtenemos una ecuación en diferencia lineal de primer orden para el modelo de crecimiento económico que, aunque tiene sensibilidad a los parámetros, es un modelo predecible y de fácil determinación de su estabilidad. En este modelo es sencilla la manera de predecir el comportamiento futuro de la producción nacional, pero no siempre se puede obtener los supuestos anteriores dada la complejidad del sector, como de menciono en el capítulo 1, por lo que enseguida presentamos un modelo donde su dinámica no permite que la predicción sea tan sencilla.

3.2.2. Previsión en Dinámica Regresiva

Ahora se mencionan las condiciones para generar el modelo regresivo. Cambiando de nuevo los supuestos en la función de producción y en la participación de la agricultura ahora tenemos,

$$Y_{t+1}= \lambda L_t^{\frac{1}{2}}\text{.........}(6)$$

$$Y_{t+1}= \delta P_t\text{.........}(7)$$

esto tiene sentido, dada la importancia del factor L y de la participación de la agricultura en el PIB, así como de su intervención en México y otras grandes metrópolis como se describió en el capítulo 1. Sobre todo si se modelan tasas de crecimiento donde intervienen dichos sectores, como lo es el sector primario.

Ahora, volviendo a sustituir (6) y (7) en (2) y despejando a Y_t tenemos,

$$Y_{t+1} - Y_t = \alpha Y_t - \beta L_t - \gamma P_t$$

$$Y_{t+1}= (1+\alpha)Y_t - \tfrac{\beta}{\lambda^2}Y_{t+1}^2 - \tfrac{\gamma}{\delta}Y_t$$

$$(1+\alpha)Y_t = -\tfrac{\beta}{\lambda^2}Y_{t+1}^2 - (\tfrac{\gamma}{\delta}+1)Y_{t+1}$$

$$Y_t=\tfrac{1}{(1+\alpha)}\cdot -\tfrac{\beta}{\lambda^2}Y_{t+1}^2 - (\tfrac{\gamma}{\delta}+1)Y_{t+1}\text{........}(8)$$

Ya que obtuvimos la ecuación (8), ahora aplicamos un cambio de variables a esta ecuación en diferencias. Por lo tanto, si $\xi = \frac{1}{(1+\alpha)}$, $\omega = -\frac{\beta}{\lambda^2}$ y $\nu = \frac{\gamma}{\delta}+1$, tenemos,

$$Y_t= \xi(\omega Y_{t+1}^2 - \nu Y_{t+1})\text{.............}(9)$$

Si $k = -\xi\nu$, obtenemos,

$$Y_t= kY_{t+1}(1-\tfrac{\omega}{\nu}Y_{t+1})\text{...........}(10)$$

En la ecuación (10) obtenemos una ecuación de la forma logística ampliamente estudiada por los biologos en los años 70´s. La ecuación fue propuesta por Verhulst para modelar el crecimiento de cualquier población, ya sea humana o de animales. Es una ecuación paradigmática porque a pesar de su sencillez es una ecuación no lineal que ha sido de utilidad para estudiar el comportamiento tan complejo que encierra este sistema en el tiempo [32].

En estricto sentido económico podemos mencionar que la producción que tenemos como objetivo en el largo plazo determinará la evolución de nuestra producción en el periodo de tiempo actual. Esta es una manera novedosa de generar predicción, ya que los especialistas económicos se encuentran arraigados en modelar los fenómenos económicos utilizando las herramientas econométricas disponibles para hacerlo. Sim embargo, no podemos desdeñar un enfoque diferente de modelación.

En el siguiente capítulo discutiremos los resultados de los modelos presentados anteriormente, el modelo de Previsión Progresiva Perfecta así como presentaremos el modelo lógistico en dinámica progresiva previamente analizado y por último, el modelo de dinámica regresiva. También se muestra las gráficas resultado de la programación de estos modelos.

Capítulo 4

Discusión y Conclusiones

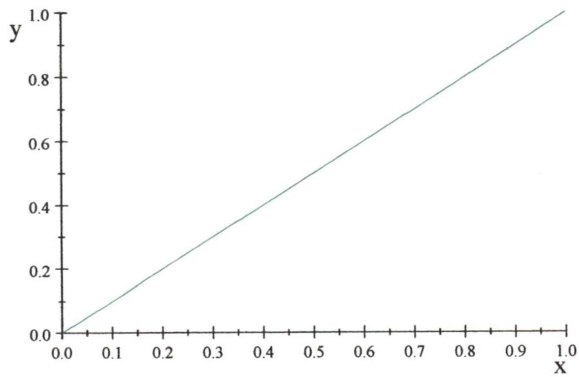
En el presente capítulo se discuten los resultados tres modelos económicos. Este capítulo se engloban los temas estudiados en los capítulos anteriores y se brinda un conclusión de los resultados obtenidos, así como la mención de futuras investigaciones en dinámica de los sistemas económicos.

4.1. Previsión Progresiva Perfecta

El primer modelo que comentaremos es el de previsión progresiva perfecta. En este, la ecuación en diferencia que obtuvimos fue $Y_{t+1} = (\alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1)Y_t$. Como podemos observar esta ecuación es lineal, teniendo como uno de sus puntos fijos el $(0, 0)$.

La tasa de crecimiento de nuestro producto interno bruto del día de mañana estará en función de la tasa del periodo de hoy, es decir, que nuestra dinámica futura estará en función del periodo anterior o previo a dicho valor.

En la Gráfica no. 10 se muestra que $f : [0,1] \times [0,1]$ es la función que representa nuestra ecuación en diferencia lineal. Cualquier valor que se tome sobre el eje de las abscisas va a predecir de manera perfecta el valor que tome el eje de las ordenadas, es decir, si sobre el eje de las abscisas tenemos nuestra tasa de crecimiento del PIB Y_t y sobre el eje de las ordenadas la tasa de crecimiento del PIB en el periodo de tiempo inmediato posterior, nuestro pronóstico o modelación será perfecta.



Gráfica 10

Ahora nos centraremos en estudiar el parámetro $\alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1$. Este parámetro lo habíamos comentado en el capítulo anterior. El parámetro α nos muestra una tasa autónoma de crecimiento a la cual se le resta los parámteros $\frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1$. El valor de este parámetro nos dirá la pendiente de la recta si es mayor que la curva a 45^0 o menor a ésta. De aquí se desprende tres casos:

Mayor Producción

Si $\alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1 > 1$ entonces nuestro crecimiento de la producción será más grande conforme el tiempo tiende al infinito. Gráficamente la curva se irá pegando cada vez más al eje de las ordenadas.

Menor Producción

Si $0 < \alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1 < 1$ entonces nuestra producción será menor a cada periodo de tiempo mayor, ya que la producción crecerá pero en menor medida hasta que converga a cero. Gráficamente nuestra curva se ajustará cada vez más hacia el eje de las abscisas.

Producción Nula

Si $0 < \alpha - \frac{\beta}{\lambda} - \gamma\delta - 1$ entonces nuestra producción será negativa y aparecerá en cuadrantes (II y IV) que no son significativos para el estudio económico.

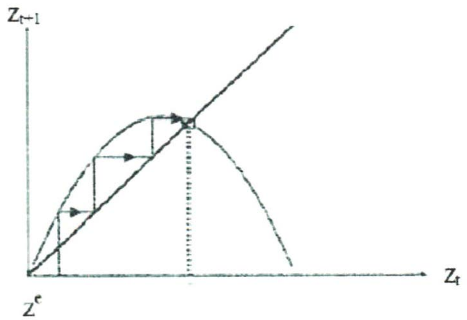
Económicamente lo que buscamos es siempre tener mayor producción de bienes y servicios de un año a otro. Por lo que buscaremos la situación donde haya mayor producción que impacte de manera positiva otras variables macroeconómicas clave, como por ejemplo, aumento del consumo, de la inversión, del gasto del gobierno, aumento del empleo, y en general, que este crecimiento se transmita en un mayor bienestar para la población.

4.2. Dinámica No Lineal Progresiva

En el modelo de Jablanovic [23], como mencionamos anteriormente relaciona la tasa de crecimiento de una economía, la participación de la agricultura y su productividad del sector. De esa relación obtiene una ecuación en diferencia de primer grado no lineal, la cual realizando un cambio de variable resulta una ecuación logística: $Z_{t+1} = \pi \cdot Z_t(1 - Z_t), Z_t \in [0,1]$.

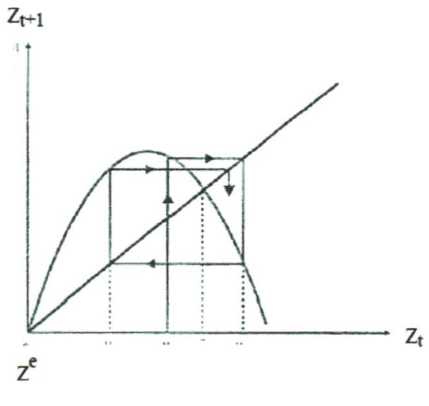
Podemos dibujar el diagrama de fase de esta ecuación en diferencias. Los cortes del gráfico es a través de la línea de 45^o en los puntos 0 y $\pi/\pi - 1$. Los picos del gráfico en $z = \frac{1}{2}$ donde la pendiente es 0. Si la segunda derivada de la función es negativo $(= -2\pi)$ entonces la función es cóncava. Si el pico de la gráfica 10 se produce a la izquierda o a la derecha del punto de $\pi/\pi - 1$ depende de si π es mayor o menor que 2. Si $1 < \pi < 2$ la gráfica intersecta a la línea de 45^o a la izquierda del pico y la pendiente de la del gráfico es positivo en el estado estacionario.

Si $\pi > 2$ la pendiente de la gráfica 10 es negativa en el punto del estado estacionario. La figura no. 10 muestra el diagrama de fases para el caso en el que $2 < \pi < 3$. Con ello se cumple la condición para la estabilidad local. Por otra parte, la pendiente de la gráfica es negativo en la estabilidad en estado estacionario.



G-10

Debido a que la pendiente es negativa, pero menor de 1 en valor absoluto, z_t converge al valor de equilibrio de cualquier dirección dentro de una zona, pero la trayectoria de aproximación oscilará localmente. Como z_t se acerca a la zona de z^e, la pendiente se hace negativa, causando que z_t empiece a oscilar, ya que converge al estado estacionario. Si $\pi \geq 3$, entonces el punto de $\pi/\pi - 1$ ya no es un estable. Una característica importante de un diagrama de fase en forma de colina es su interesante comportamiento dinámico. Aunque nunca converge a z^e, z_t oscila dentro de un rango acotado, e incluso podría converger en un periódico comportamiento regular.



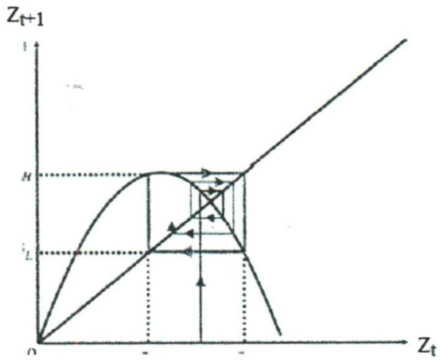
G-11

En la G-11 muestra el diagrama de fases para el caso de

$\pi = 3{,}5$. Se sabe que f es negativo en este caso las trayectorias oscilan en la región estacionaria. En este sentido, los caminos no convergen al punto de equilibrio. Asimismo, no divergen éstas al cero o al infinito. La razón de que f no es monótona, es causado por la forma de colina que tiene la curva. Además, el siguiente camino desemboca en la región positiva inclinada de la curva de fase, haciendo que rebote hacia atrás. Esto devuelve la ruta inmediatamente a la región de pendiente negativa de la curva, lo que conduce de nuevo a las oscilaciones divergentes.

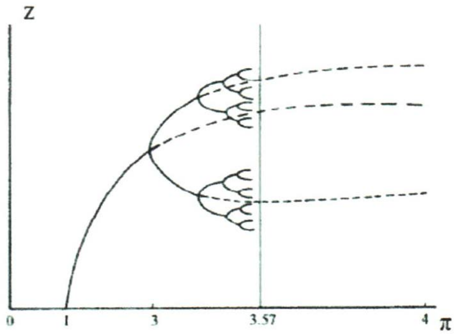
Si $1 < \pi < 3$, entonces la función convergerá al estado estacionario, pero si $\pi > 3$, entonces no converge al estado estacionario pero tampoco difieren sin cesar. Si π es ligeramente mayor que 3, z_t converge a un ciclo límite estable en dos períodos de tiempo.

El sistema se bifurca en $\pi = 3$, lo que significa que cambia de tener un valor de estado estacionario z_t, para tener un equilibrio en el cual hay dos valores entre los cuales el camino de z oscilaciones. Si π es tan grande como aproximadamente 3,5, el ciclo límite de dos periodos se vuelve inestable y el sistema se bifurca de nuevo. Ahora, un ciclo límite estable es de cuatro periodos de tiempo.



G-12

En la G-12 se muestra el diagrama de fase cuando $\pi = 3{,}2$. En este valor, se obtiene un ciclo límite de dos períodos. Los valores más altos llevan a bifurcaciones repetidas y, por tanto, la duplicación del período de los ciclos límite. En algunos de los valores de π, las trayectorias en el tiempo no tiene ciclos de cualquier longitud, a pesar de que siguen siendo limitadas. Esto se dice que es el *caos*.



G-13

En el G-13 se presenta el diagrama de bifurcaciones. Entonces si resumimos los resultados del modelo logístico de dinámica progresiva son los siguientes:

i) Para los valores del parámetro $0 < \pi < 1$ todas las soluciones convergen a $z = 0$, el estado estacionario;

ii) Para $1 < \pi < 3{,}57$, existen puntos fijos de la cuál depende de π;

iii) Si $1 < \pi < 2$, todas las soluciones monótonas aumentan en $z = \frac{\pi - 1}{\pi}$;

iv) Si $2 < \pi < 3$, las soluciones convergen a $z = \frac{\pi-1}{\pi}$;

v) Para $3 < \pi < 4$, todas las soluciones fluctúan constantemente;

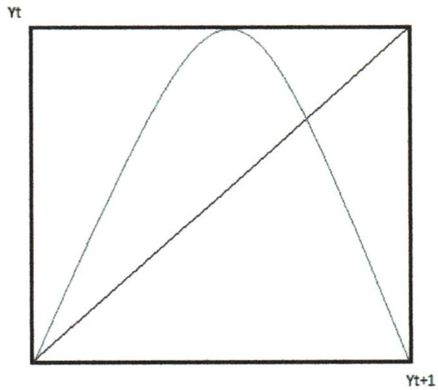
vi) Si $3{,}57 < \pi < 4$, la solución se convierte en caótica, significa que no existe solución totalmente aperiódica o soluciones periódicas.

Por ello en [32] destaca que el umbral o la zona crítica del modelo logístico se encuentre entre los valores de $3{,}7 < \pi < 3{,}8$. Podemos entonces decir que el modelo de [23] al ser de estilo logístico ya analizado anteriormente, un sistema de crecimiento económico es caótico para ciertos parámetros del valor π.

4.3. Previsión en Dinámica Regresiva

Ahora pasamos a analizar el siguiente modelo en dinámica regresiva. A diferencia del modelo antes presentado, éste se encuentra en función del periodo anterior, es decir, que la producción del periodo actual está en función de la producción del periodo inmediato siguiente. La función que obtenemos, y que comentamos anteriormente es de tipo logística pero en dinámica regresiva.

De la ecuación (10) si $-\frac{\omega}{v} = 1$, tenemos entonces que $Y_t = kY_{t+1}(1 - Y_{t+1})$. Como ahora podemos observar tenemos una ecuación de forma logística pero a diferencia de [23] ahora nuestro modelo depende de la tasa de crecimiento económico del periodo $t + 1$.



G-14

En el G-14 relaciona esta función logística en dinámica inversa. Por [21] se demuestran que las funciones de este tipo determina un comportamiento caótico para dicha función. De ésta, en la función ligadura en el n-ésimo término se crea un continuo de *Knaster* o una herradura de *Smale*. El gráfico no. 15 repersenta esta herradura.

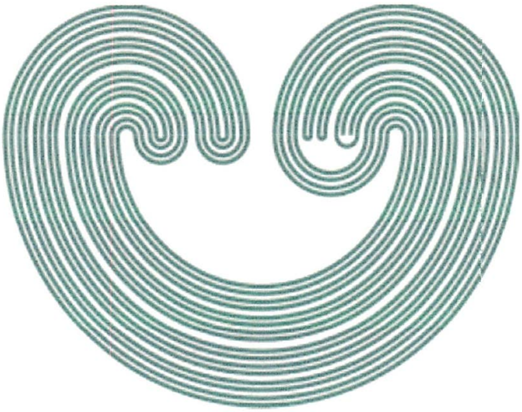
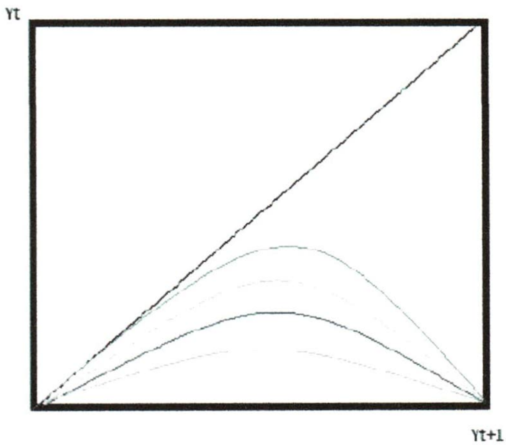


Gráfico 15

En el gráfico siguiente se muestra otro comportamiento dados los parámetros de la función logística. Si de estos parámetros obtenemos una función de este estilo, la función tendré estabilidad y por lo tanto las trayectorias convergeran hacia el estado estacionario.



G-16

Todas aquellas valores de $-\frac{\omega}{v} < 1$ dará como resultado un conjunto de trayectorias que estarán por debajo de la recta de 45^o convergeran a unos de los sus puntos fijos. Por el contrario, como ya lo comentamos en la situación anterior, aquellas trayectorias que se encuentre por arriba de la diagonal existrián trayactorias periódicas hasta llegar al caso dónde está se vuelva caótica [21].

Para el valor de k se tienen los siguientes escenarios:

i) Si $k = 1$ tenemos sólo un punto.

ii) Si $1 < k < 2$ tenemos un arco que va creciendo.

iii) Si $3 < k < 4$ entonces tendrémos un continuo indescomponible que nos generará un herradura de Smale [22].

4.4. Conclusiones

A lo largo de esta investigación hemos observado la volatilidad y debilidad del sector agrícola nacional. Al paracer las políticas no se han centrado en dotar de mayores recursos y este se encuentra en una situación cada vez más precaria. Uno de los objetivos de este trabajo es dotar a los encargados de la política económica mexicana de brindar soluciones alternas al problema. Los modelos que presentamos de crecimiento económico podemos mencionar que dado su comportamiento logístico, muestra que para ciertos parámetros el sistema entra a una fase caótica.

También es importante mencionar la sensibilidad de los parámetros y ya que para ciertos valores de éstos, el sistema genera caos, debido a que en el límite inverso genera subcontinuos indescomponibles en la familia logística descrita en [21]. Para el primero caso analizado de previsión perfecta los incrementos en nuestra tasa de crecimiento económica de hoy tendrá el mismo efecto porporcional en la tasa del periodo posterior. Por ello su previsión es fácil de pronosticar. En el modelo de [23] demuestra que la previsión es más compleja, ya que su dinámica a diferentes valores de su parámetros nos lleva a situaciones dónde el desorden impera.

En el sentido económico decimos que podemos tomar un valor de la tasa de crecimiento en el periodo de hoy y su efecto para el periodo siguiente no podrémos saber cuál es, ya que oscilará si es caótico de manera permanente y jamás llegará a un estado deseado para el bienestar de la población. Para los economistas de nada servirá un sistema dinámico económico que pueda ser caótico, ya que no permitirá hacer ningún pronóstico útil para formular política económica.

Para nuestro modelo regresivo los críterios han sido ya analizados por destacados topólogos. Al igual que May en 1976, Ingram obtuvo resultados importantes para la función logística regresiva. También existe una alta sensibilidad en sus parámetros y un caso extremo de ello es obtener una tendencia que nos lleve al caos.

Queda mucho camino por recorrer para que estos modelos a través de los límites inversos permitan dotar de información a los gobiernos y se traduzca en mejores políticas económicas.

Existen modelos que no han sido ampliamente estudiados desde el enfoque económico, pero que sus resultados matemáticos a través de límites inversos son robustos. Una de las posibles líneas de investigación futuras son determinar las regiones caóticas - atractores- de un sistema regresivo. Por supuesto el reto se hace aún mayor que éste tenga una utilidad directa en la economía, y no sólo se quede como un novedoso análisis cualitativo de los sistemas dinámicos económicos.

Capítulo 5

Anexo

Cuadro No. 1

Producto Interno Bruto Agropecuario de varios países

Tasa de Crecimiento Media

%

Periodo	Canadá	Corea	Costa Rica	Chile	China	EUA	México	Vietnam
1980-1990	2	3	3.1	5.9	5.9	4	0.8	4.3
1990-1996	0.7	1.8	3.2	5.5	4.4	4.2	1.2	5.2
1990-2000	1.1	2	4.1	1.5	4.1	3.5	1.8	4.8

FUENTE: Ibarra-Acosta, 2005: 155

Cuadro no. 2

México: Producto Interno Bruto por Actividad Económica

miles de pesos a precios 1980

1960-1993

Año	PIB	Primario[1]	Secundario[2]	Terceario[3]
1960	1252293	195563	254815	283551
1961	1306383	198678	267550	297097
1962	1364631	205439	277830	308858
1963	1467653	214595	304169	332823
1964	1629151	230905	353860	368726
1965	1729324	236155	382270	406254
1966	1834746	241547	410620	427432
1967	1942169	244606	434790	458332
1968	2125185	249198	469262	546499
1969	2197837	252026	502302	527078
1970	2340751	262513	539125	566444
1971	2428821	277805	554663	588926
1972	2628684	279717	602412	648918
1973	2835328	290942	657041	704991
1974	2999120	298238	690245	743228
1975	3171404	304055	718927	798310
1976	3311499	307168	750755	832559
1977	3423780	330960	772528	861961
1978	3730446	351000	847907	963685
1979	4092231	343410	934544	1103964
1980	4470077	368049	988900	1249572
1981	4862219	390559	1052660	1362118
1982	4831689	382872	1023811	1369598
1983	4628937	390605	943549	1266538
1984	4796050	401120	990856	1296133
1985	4920430	416163	1051109	1312451
1986	4735721	404841	995848	1226676
1987	4823604	410405	1026136	1233855
1988	4863679	394909	1056959	1254808
1989	5047209	386015	1135087	1302093
1990	5271539	408807	1203924	1355138
1991	5462729	412742	1252246	1413622
1992	5615955	408643	1280655	1464321
1993	5649674	414417	1270979	1444698

[1] *Agropecuario, Silvicultura y Pesca*

[2] *Industria Manufacturera*

[3] *Comercio, Restaurantes y Hoteles*

FUENTE: INEGI

Cuadro no. 3

México: Participación Sectores Económicos / PIB

Porcentaje (%)

1960-1993

Año	Primario	Secundario	Terçeario
1960	15.6	20.3	22.6
1961	15.2	20.5	22.7
1962	15.1	20.4	22.6
1963	14.6	20.7	22.7
1964	14.2	21.7	22.6
1965	13.7	22.1	23.5
1966	13.2	22.4	23.3
1967	12.6	22.4	23.6
1968	11.7	22.1	25.7
1969	11.5	22.9	24.0
1970	11.2	23.0	24.2
1971	11.4	22.8	24.2
1972	10.6	22.9	24.7
1973	10.3	23.2	24.9
1974	9.9	23.0	24.8
1975	9.6	22.7	25.2
1976	9.3	22.7	25.1
1977	9.7	22.6	25.2
1978	9.4	22.7	25.8
1979	8.4	22.8	27.0
1980	8.2	22.1	28.0
1981	8.0	21.6	28.4
1982	7.9	21.2	28.3
1983	8.4	20.4	27.4
1984	8.4	20.7	27.1
1985	8.5	21.4	26.7
1986	8.5	21.0	25.9
1987	8.5	21.3	25.6
1988	8.1	21.7	25.7
1989	7.6	22.5	25.8
1990	7.8	22.8	25.7
1991	7.6	22.9	25.9
1992	7.3	22.8	26.1
1993	7.3	22.5	25.6

FUENTE:Elaboración propia con datos INEGI

Cuadro no. 4

México: Crédito de la Banca Comercial y de Desarrollo

miles de millones de pesos

Año	Total Nacional	Total Agropecuario	Banca Comercial	Banca Desarrollo
1990	249.0	21.4	13.3	8.1
1993	585.5	40.9	30.5	10.4
1995	1129.2	55.5	40.2	15.3
1996	1231.8	65.6	47.5	18.1
1997	1280.9	70.5	50.5	20
1998	1491.5	61.2	49.9	11.3
1999	1427.5	58.6	45.9	12.7
2000	1343.1	53.4	39.3	14.1
2001	1275	47.9	33.8	14.1

FUENTE: Ibarra-Acosta, 2006: 353

Cuadro no. 5

México: Crédito de la Banca Comercial y de Desarrollo

porcentaje (%)

Año	Total Nacional	Total Agropecuario	Banca Comercial	Banca Desarrollo
1990	100	8.6	5.3	3.3
1993	100	7.0	5.2	1.8
1995	100	4.9	3.6	1.4
1996	100	5.3	3.9	1.5
1997	100	5.5	3.9	1.6
1998	100	4.1	3.3	0.8
1999	100	4.1	3.2	0.9
2000	100	4.0	2.9	1.0
2001	100	3.8	2.7	1.1

FUENTE: Ibarra-Acosta,2006: 353

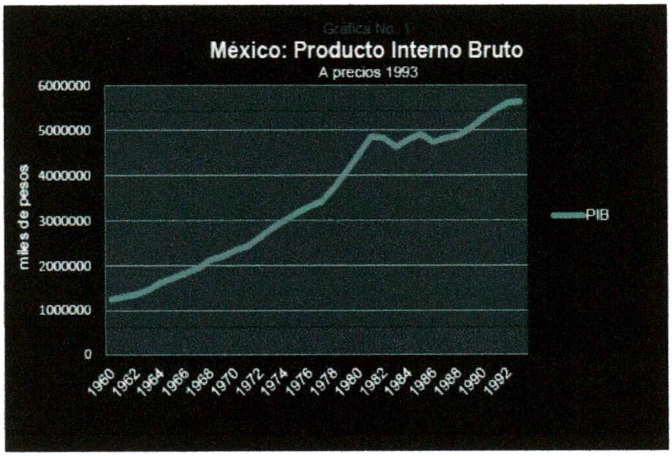
Cuadro No. 6

México: Población, Producto y Productividad

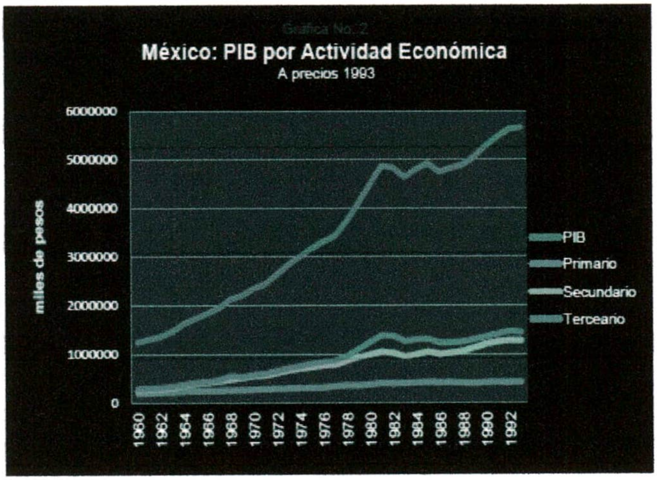
millones de habitantes

	Población		Población Ocupada			Productividad del Trabajo		
			Total	Agropecuaria		Total	Agropecuaria	
Año	Total	Rural	Total	Serie Hist.	Enc. Empleo	Total	Serie Hist.	Enc. Empleo
1960	34.9	17.2	8.3	6.1	---	30.0	5.5	---
1980	66.8	22.5	20.3	5.7	---	43.8	11.0	---
1990	81.2	23.3	25.9	6.2	---	44.0	11.2	---
1991	83.2	24.1	30.5	6.2	8.2	38.9	11.5	8.7
1993	86.6	24.3	32.8	6.2	8.8	38.3	11.8	8.2
1995	90.2	24.4	33.9	6.2	8.4	36.3	12.0	8.9
1996	92.2	24.6	35.2	6.3	7.9	36.7	12.2	9.7
1997	93.9	24.7	37.4	6.2	9.0	37.0	12.4	8.5
1998	95.7	24.9	38.6	6.3	7.8	37.5	12.6	10.2
1999	97.6	24.9	39.1	6.4	8.2	38.5	12.6	9.8
2000	97.4	24.7	39.0	6.4	7.1	41.1	12.7	11.5
2001	---	---	---	---	---	---	---	---

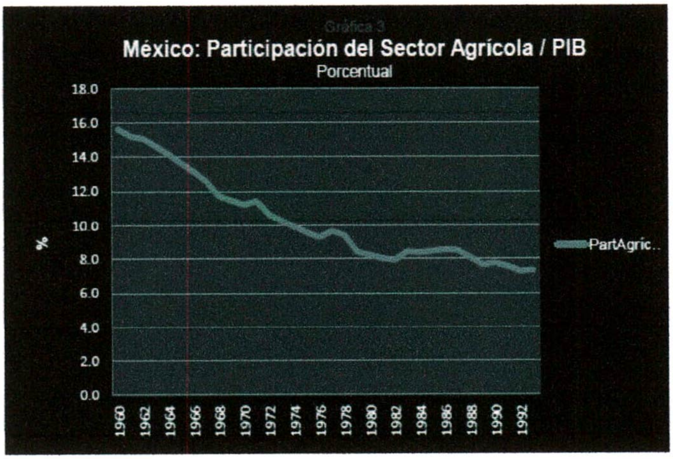
FUENTE: Ibarra-Acosta, 2005: Anexo



Gráfica No. 1
México: Producto Interno Bruto
A precios 1993
miles de pesos
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
0
1960
1962
1964
1966
1968
1970
1972
1974
1976
1978
1980
1982
1984
1986
1988
1990
1992
PIB



Gráfica No. 2
México: PIB por Actividad Económica
A precios 1993
miles de pesos
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
0
1960
1962
1964
1966
1968
1970
1972
1974
1976
1978
1980
1982
1984
1986
1988
1990
1992
PIB
Primario
Secundario
Terceario


Gráfica 3
México: Participación del Sector Agricola / PIB
Porcentual
18.0
16.0
14.0
12.0
10.0
8.0
6.0
4.0
2.0
0.0
%
1960
1962
1964
1966
1968
1970
1972
1974
1976
1978
1980
1982
1984
1986
1988
1990
1992
PartAgric..

Bibliografía

[1] Alligood, Kathleen T., Sauer, Tim D. y Yorke, James A. *Chaos. An introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag New York, Inc., 1996.

[2] Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, 3rd edition, Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] M. Barge and B. Diamond., "The dynamics of continuous maps of finite graphs through inverse limits", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344, 773–790, 1994.

[4] John Beghin, Sebastien Dessus, David Roland-Holst and Dominique van der Mensbrugghe., "The trade and environment nexus in mexican agriculture. A general equilibrium analysis", *Agricultural Economics* 17, pp. 115-131, 1997.

[5] Bennett, R., .ºn inverse limit sequences", Master' Thesis, University of Tennesse, 1962.

[6] Blanchard, P., Devaney, R., Hall, G., *Ecuaciones Diferenciales*, México: International Thomson Editores, 1999.

[7] Boyce, W., Diprima, R., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, New York: J. Wiley, 2001.

[8] Borlaug, Norman E. y Dowswel, Christopher R., "Perspectivas de la agricultura mundial para el siglo XXI", *Manejo Integrado de Plagas y Agroecología* (Costa Rica) No. 65 pp. 4-20, 2002.

[9] Braun, M., *Differential Equations and their Applications*, New York: Springer-Verlag, 1993.

[10] H. Chen, M. Li, Y. Lin., Çhaotic dynamics in an overlapping generations model with myopic and adaptive expectations", *Journal of Economic Behavior & Organization*, 67 (2008) pp. 48–56.

[11] Chiang, Alpha. *Elements of Dynamic Optimization*, USA. McGraw-Hill. 1992.

[12] Day, Richard H., Dasgupta, Sudipto., Samar K. Datta and Jeffrey B. Nugent., "Instability in rural-urban migration", *The Economic Journal*, 97 {December 1987), pp. 940-950.

[13] Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley, 1989.

[14] Dussel Peters, Enrique., "Hacia una política de competitividad", *EconomíaUNAM*, vol. 3 núm. 9, 2006.

[15] Escalante, Roberto., "Desarrollo rura, regional y medio ambiente", *EconomíaUNAM*, vol. 3 núm. 8, 2006

[16] Escalante, Roberto, y Catalán, Horacio.,"Situación actual del sector agropecuario en México: perspectivas y retos", *Economía Informa*, núm. 350, enero-febrero 2008.

[17] Escalante, Roberto., Catalán, Horacio., Galindo, Luis Miguel.y Reyes, Orlando. "Desagrarización en México: Tendencias actuales y retos hacia el futuro", *Cuadernos de Desarrollo Rural*, No. 59, Pontificia Universidad Javeriana Bogotá, Colombia, pp.87-115.

[18] Gómez-Oliver, Luis., "La política agrícola en el nuevo estilo de desarrollo latinoamericano", *FAO*, Santiago de Chile, 1994.

[19] Ibarra David, Alicia Acosta (2003), "El dilema campesino", en *Investigación Económica*, vol. LXII, 245, 151-220.

[20] W. T. Ingram. "Periodicity and indecomposibility", *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (1995) 1007-1016.

[21] W. T. Ingram., "Families of inverse limits on [0,1]", *Topology Proc.* 27 (2003), 189-201.

[22] W. T. Ingram., "Inverse limits on [0,1] using logistic bonding maps", *Topology and it´s applictions*, 72 (1996), 159-172.

[23] V. Jablanovic., .A Chaotic Economic Growth Model and the Agriculture Share of an Output", *Journal of Agricultural Sciences*, Vol. 50, No 2, 2005, pp. 207-216.

[24] Jordan, D. W., Smith, P., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford: Oxford Univ. Press, 1994

[25] Kennedy, Jydu, "Inverse Limits, Economics, and Backward Dynamics", *Rev. R. Acad. Cien. Serie A.* Mat.Vol. 102 (1), 2008, pp. 39–73.

[26] J. Kennedy, Brian Raines and David Stockman, .Expected Utility in Models with Chaos", Working Paper No. 2007-16, *Department of Economics Alfred Lerner College of Business & Economics*, University of Delaware.

[27] Keesling, James., .Attractors and Inverse Límits", *Rev. R. Acad. Cien. Serie A.* Mat.Vol. 102 (1), 2008, pp. 21–38.

[28] Laura Gardini, Cars Hommes, Fabio Tramontana, Robin de Vilder., "Forward and backward dynamics in implicitly defined overlapping generations models", *Journal of Economic Behavior & Organization,* 71 (2009) 110–129.

[29] Tien Yien Li and James A. Yorke., "Period three implies chaos". *Amer. Math. Monthly*, 82(10):985–992, 1975.

[30] Lomelí, Héctor y Rumbos, Beatriz. *Métodos Dinámicos en la Economía*, JiT Press, 2a Edición, 2001.

[31] S. Macías., "Topics on Continua", Chapman & Hall/CRC, (2005).

[32] May, R., "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature*, 261:459, 1976.

[33] Medio, Alfredo y Lines Marji. *Nonlinear Dynamics. A primer*, Cambridge University Press, 2001.

[34] S. B. Nadler Jr. *Continuum Theory.* Marcel Deker, Inc., New York, 1992.

[35] S. B. Nadler Jr., "Hyperspaces of Sets. A text with research questions", *Aportaciones Matemáticas,* Serie Textos # 33, Sociedad Matemática Mexicana (2006).

[36] Novelo Urdanivia, Fernando., .El diálogo social en el campo", *EconomíaUNAM*, vol. 4 núm. 10, 2007

[37] Perko, L., *Differential Equations and Dinamical Systems.* Text in Applied Maths., New York: Springer–Verlag, 1990.

[38] Rello, Fernando., "Inercia estructural, globalización y agricultura. Lecciones del caso mexicano", *EconomíaUNAM*, vol. 6 núm. 17, 2009.

[39] Ronald Shone. *Economic Dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.

[40] Solow, R. .A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* 70: 65-94. 195C

Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.